

· 煤田物探 ·

小波包变换空间滤波法分离信号研究^{*}

李锦飞 李人厚 (西安交通大学 710049)

摘要 利用小波包分析在时域和频域同时具有良好的局部化特性,对信号进行小波包变换后,用谱矩阵法计算质点的空间运动特性,构造相应的滤波函数,对分解后的信号进行滤波,将滤波结果用逆小波包变换进行重构,实现了滤除干扰、保留有用信号的目的,取得了非常满意的效果。

关键词 小波包 正交样条 谱矩阵 信号处理 空间滤波

中国图书资料分类法分类号 P631.414

作者简介 李锦飞 男 34岁 博士 智能信息处理

1 引言

空间滤波是在研究空间波场中质点运动特性基础上进行的一种信号处理方法,在光学、电磁学和地震波的研究中有着广泛的应用。空间波场中的运动大体可分为体波和面波两种,体波又可划分为P波、SV波和SH波。不同类型的波,对应着空间中的不同运动特性。而不同的应用目的,又经常需要从记录中进行波场分离的信号处理。文献[1]对空间中光波的传播规律和其电磁特性进行了详细的论述。空间滤波方法是本世纪60年代在天然地震和地震勘探研究中提出的。近20年来出现了许多波场运动特性的分析和分离方法,其中基于时域谱矩阵法是较好的方法之一。它具有良好的抗干扰性能,在光学、电磁学和地震信号的处理中得到了应用。但是它是基于准单色信号的滤波方法。文献[2]是通过窄带通滤波器先对信号进行滤波,再通过不断移动窄带通滤波器的中心频率,将信号尽量分解为单频(实际不可能)信号,然后用时域谱矩阵法进行分析和滤波。这种方法的缺点是:窄带通滤波器在实际设计中其带通不可能设计的很窄,滤波器的阶数也不能很高,这样其选频特性不能完全满足谱矩阵滤波法要求单色(或准单色)的要求。此外由于窄带通滤波器的非正交性使得滤波后的信号的重构性能也存在较大的问题。

笔者利用小波包变换具有良好的时域和频域局

部化特性,对信号进行完全正交小波包分解(Gabor基),然后用具有良好性能的矩阵滤波法对信号进行处理,以达到从实际运动波场中分离出有用波,消除干扰波和无用波的目的。

2 三分量记录信号的小波包变换

2.1 小波函数的选取

为达到信号良好分频的目的,要求所采用的小波函数具有很好的频域局部化特性,所对应的小波分解滤波器的频率响应在通频带内应较为平坦,过渡带应尽量窄;另外在进行小波包变换时应采用不产生相移(或只产生线性相移)的小波函数,即要求小波函数具有对称性。综合以上几方面的考虑,采用正交样条小波可满足要求,在计算中采用了13次正交样条小波。

2.2 三分量记录信号的小波包变换^[3]。

对于给定的正交低通和高通滤波器系数 l_n 和 h_n ,满足

$$\begin{cases} \sum l_{n-2j} l_{n-2k} = \delta_{j,k}, \\ \sum l_n = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{和} \quad h_k = (-1)^k h_{1-k}. \quad (2)$$

我们以如下的方式递推地定义小波包序列 $\{W_b(t) \mid b \in N_0\}$,其中 $N_0 = \{0\} \cup N$ (N 为自然数集)

$$\begin{cases} W_{2b}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum l_k W_b(2t - k), \\ W_{2b+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_k W_b(2t - k). \end{cases} \quad (3)$$

^{*} 煤炭科学基金(编号:96地20810)资助项目部分内容

其中尺度函数 $W_0(t)$ 由下式确定:

$$W_0(t) = F^{-1}[\prod H_0(\frac{\omega}{2})](F^{-1} \text{ 表示逆傅氏变换}),$$

而 $H_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k l_k e^{-jk\omega}$ 为滤波器 $\{l_n\}$ 的频率响

应。由式(3)我们不难得到

$$W_b(t-k) = \frac{1}{2} \sum_i l_{k-2i} W_{2b}(\frac{t}{2} - i) + \frac{1}{2} \sum_i h_{k-2i} W_{2b+1}(\frac{t}{2} - i). \quad (4)$$

可以证明, 函数列 $\{W_b(t-k) | k \in Z, b \in N_0\}$ 构成 $L^2(R)$ 的一组规范正交基。这样, 任何一个信号 $f(t) \in L^2(R)$, 均可由 $W_b(t-k) (k \in Z, b \in N_0)$ 线性表示。由此可以知道, 对任一整数 j , 函数 $\{2^{-j/2} W_b(2^{-j} t - k) | k \in Z, b \in N_0\}$ 也构成 $L^2(R)$ 的一组规范正交基。

对一个离散采样信号 $w_{0,0}$ (用 $w_{0,0,k}$ 表示其第 k 个分量), 其相应的连续时间信号为:

$$f(t) = \sum_k w_{0,0,k} W_0(t-k). \quad (5)$$

式(5)实际上类似于带限为 $[0, \pi]$ 的信号 $f(t)$ 用抽样进行恢复的表达式(Shannon 定理)。由式(4)有

$$W_0(t-k) = \frac{1}{2} \sum_i l_{k-2i} W_0(\frac{t}{2} - i) + \frac{1}{2} \sum_i h_{k-2i} W_1(\frac{t}{2} - i), \quad (6)$$

则式(5)可化为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k w_{0,0,k} [\frac{1}{2} \sum_i l_{k-2i} W_0(\frac{t}{2} - i) + \frac{1}{2} \sum_i h_{k-2i} W_1(\frac{t}{2} - i)] \\ &= \sum_i \frac{1}{2} (\sum_k w_{0,0,k} l_{k-2i}) W_0(\frac{t}{2} - i) + \sum_i \frac{1}{2} (\sum_k w_{0,0,k} h_{k-2i}) W_1(\frac{t}{2} - i). \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{令 } w_{1,0,k} = \sum_m w_{0,0,m} l_{m-2k}, w_{1,1,k} = \sum_m w_{0,0,m} h_{m-2k},$$

则式(7)变为:

$$f(t) = \sum_k \frac{1}{2} w_{1,0,k} W_0(\frac{t}{2} - k) + \sum_k \frac{1}{2} w_{1,1,k} W_1(\frac{t}{2} - k). \quad (8)$$

将 $W_0(\frac{t}{2} - i), W_1(\frac{t}{2} - i)$ 继续按式(7)展开, 并依次类推, 可得到塔式算法。

一般地, 有分解式

$$f(t) = \sum_{b=0}^{2^J-1} \sum_{k \in Z} w_{j,b,k} \cdot 2^{-J/2} W_b(2^{-J} t - k), \quad (9)$$

$$\begin{cases} w_{j,2b,k} = \sum_m w_{j-1,b,m} \cdot l_{m-2k}, \\ w_{j,2b+1,k} = \sum_m w_{j-1,b,m} \cdot h_{m-2k}, \end{cases} \quad (10)$$

式中 $j=1, 2, \dots, J$;

$$b=0, 1, \dots, 2^j-1.$$

相应地有

$$w_{j-1,b,k} = \sum_m l_{k-2m} w_{j,2b,m} + \sum_m h_{k-2m} w_{j,2b+1,m}. \quad (11)$$

式(10)称为小波包分解算法, 式(11)称为小波包恢复算法。

小波包变换有许多种变化形式。其中 DWT (离散小波变换) 是 WPT (小波包变换) 的一个特殊情况。通过在小波包表中选择表示信号的不同基底, 可实现不同类型的小波包变换。在实际中常用的一种变换是选择小波包表的一个完整的分辨水平的包元作为小波包变换的基底 (Gabor 基), 通过这种小波包变换可将信号分解为一些正交分量集合:

$$W_{j,b}(t) = \sum_k w_{j,b,k} W_{j,b,k}(t). \quad (12)$$

式中 $W_{j,b}(t)$ 是 j 水平、 b 小波包元 (节点) 对应分解后的信号;

$w_{j,b,k}$ 是小波包系数;

$W_{j,b,k}(t)$ 是小波包函数。

式(12)类似于小波分析的多分辨率分解。例如, 信号 $f(t)$ 的 Level 10 的小波包分解是:

$$f(t) \approx W_{10,0}(t) + W_{10,1}(t) + \dots + W_{10,1023}(t). \quad (13)$$

DWT 对较粗尺度的特性给出了细分解, 而小波包变换对较细尺度的特性给出更细的分解。对记录的三分量测试, 由于较细尺度的更细分解, 小波包分解优于 DWT 分解, 故小波包变换在高频段有更好的频率局部化特性。

3 复时间域谱矩阵滤波理论

谱矩阵技术是基于应用于准单色波理论的统计光学原理^[1,4,5], 文献[2]将其应用于地震信号的处理中。对一个单色波信号, 其幅度和相位不随时间变化。然而一般情况的准单色波场是部分极化的, 即由

一个完全极化和一个非极化的波场叠加组成,其极化特性可通过(14)式定义的谱矩阵 \mathbf{J} 来描述:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle ZZ^* \rangle & \langle ZX^* \rangle \\ \langle XZ^* \rangle & \langle XX^* \rangle \end{bmatrix}. \quad (14)$$

式中 Z, X 是平面波场中正交的两个信号分量;

$*$ 表示复共轭;

$\langle \rangle$ 表示取数学期望。

Z, X 两个分量信号的一般形式是:

$$\begin{aligned} Z(t) &= A_Z(t) \exp \{ i(2\pi f t + \Phi(t)) \}, \\ X(t) &= A_X(t) \exp \{ i(2\pi f t + \Phi(t)) \}. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 A_Z, A_X 分别表示 Z, X 两个分量信号的幅度;

Φ, Φ 分别表示 Z, X 两个分量信号的初始相位。

对于一个严格的单色波信号,其幅度和相位不随时间变化,这种情况下 \mathbf{J} 矩阵为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A_Z^2 & A_Z A_X e^{i(\Phi_Z - \Phi_X)} \\ A_Z A_X e^{-i(\Phi_Z - \Phi_X)} & A_X^2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其行列式 $\det[\mathbf{J}] = 0$, 波场的能量由 \mathbf{J} 的迹 $\text{Tr}[\mathbf{J}]$ 给出:

$$\text{Tr}[\mathbf{J}] = A_Z^2 + A_X^2, \quad (17)$$

波场的极化参数可表示为:

$$\sin 2\beta = \frac{2A_Z A_X}{A_Z^2 + A_X^2} \sin(\Phi_Z - \Phi_X), \quad (18)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2A_Z A_X}{A_Z^2 - A_X^2} \cos(\Phi_Z - \Phi_X). \quad (19)$$

式中 $\tan \theta$ 表示极化椭圆的短半轴与长轴之比;

β 的符号表示质点的两种不同的运动方向;

θ 为极化椭圆主轴与 X 轴的夹角。

对于 \mathbf{J} 矩阵的一般形式,由其定义可知, \mathbf{J} 是埃尔米特矩阵,即 $J_{ij} = J_{ji}^*$ 。根据参考文献[1],如果几个单色信号同时沿一个方向传播,其合成信号(满足准单色信号的要求)的谱矩阵是各个单色信号的谱矩阵之和。因此一个准单色信号可看作是完全极化的信号和非极化的信号之和,则任一谱矩阵 \mathbf{J} 能唯一地表示为: $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$ 。其中 \mathbf{S} 对应由信号产生的完全极化部分的谱矩阵; \mathbf{N} 对应由噪音产生的非极化部分的谱矩阵。如果还假定噪音在两个方向上具有相同的方差,即噪音是随机的,且各向同性的,则矩阵 \mathbf{S} 能被表示为:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{ZZ} & s_{ZX} \\ s_{SX} & s_{XX} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其 $s_{ZZ} \geq 0, s_{XX} \geq 0$, 且 $s_{ZZ}s_{XX} - s_{ZX}s_{ZX} = 0$, 矩阵 \mathbf{N} 能被

表示为:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}. \quad (21)$$

由 $\det[\mathbf{J}] = 0$, 可推导出下列式子:

$$s_{ZZ} = \frac{1}{2}(J_{ZZ} - J_{XX}) + \frac{1}{2} \{ (J_{ZZ} + J_{XX})^2 - 4\det[\mathbf{J}] \}^{1/2}, \quad (22)$$

$$s_{XX} = \frac{1}{2}(J_{XX} - J_{ZZ}) + \frac{1}{2} \{ (J_{ZZ} + J_{XX})^2 - 4\det[\mathbf{J}] \}^{1/2}, \quad (23)$$

$$n = \frac{1}{2}(J_{ZZ} + J_{XX}) - \frac{1}{2} \{ (J_{ZZ} + J_{XX})^2 - 4\det[\mathbf{J}] \}^{1/2}, \quad (24)$$

$$s_{ZX} = J_{ZX}, \quad (25)$$

$$s_{XZ} = J_{XZ}, \quad (26)$$

式中 $\det[\mathbf{J}] = J_{ZZ}J_{XX} - J_{ZX}J_{XZ}$ 。

至此实现了噪音与信号的分离。极化度 P^2 可定义为:

$$P^2 = \frac{\text{tr}[\mathbf{S}]}{\text{tr}[\mathbf{J}]} = [1 - \frac{4\det[\mathbf{J}]}{(J_{ZZ} + J_{XX})^2}]^{1/2}. \quad (27)$$

由于 $\det[\mathbf{S}] = 0$, 所以 \mathbf{S} 矩阵的一个特征值为零, 另一特征值为 $\text{tr}[\mathbf{S}] = s_{ZZ} + s_{XX}$ 。 \mathbf{S} 矩阵对应该非

零特征值的特征向量可表示为: $\begin{bmatrix} 1 \\ s_{XX}/s_{ZX} \end{bmatrix}$,

$$\text{所以 } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{s_{XX}}{s_{ZX}} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 e^{j\Psi} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

也是 \mathbf{S} 的特征向量。其中 x_1, x_2 是实数, Ψ 是相角。

选择合适的相角 Φ 将式(28)两端同乘 $e^{j\Phi}$ 有:

$$\mathbf{X} e^{j\Phi} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 e^{j\Psi} \end{bmatrix} e^{j\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

则可推导出:

$$\Phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{x_2^2 \sin 2\Psi}{x_1^2 + x_2^2 \cos 2\Psi} \right]. \quad (30)$$

要使得实向量 \mathbf{v} 和 \mathbf{v} 满足 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$, 椭圆率 e 定义为 \mathbf{v}, \mathbf{v} 两向量的范数之比。设 $\|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{v}\|$, 则:

$$e = \|\mathbf{v}\| / \|\mathbf{v}\|. \quad (31)$$

对于保留椭圆极化波, 压制线性极化波和噪音的情况下, 滤波函数为:

$$G_e = P^m \cdot e^n. \quad (32)$$

对保留线性极化波, 压制椭圆极化波和噪音的

情况下, 滤波函数为:

$$G_l = P^m \cdot (1 - e)^n. \tag{33}$$

式(32)、(33)中 m, n 为整数。

4 基于小波包分解的谱矩阵滤波算法

基于小波包分解的谱矩阵滤波算法流程如图 1 所示。

- a. 输入描述平面波质点运动特性的正交两分量记录信号 Z, X 。
 - b. 对记录的实信号 Z, X 进行 Hilbert 变换, 将其变换为复信号表示。
 - c. 对两个分量的复信号进行正交小波包的完全分解。
 - d. 将小波包分解后的信号加时窗处理, 计算中使用的时窗函数为:
$$u(t) = \begin{cases} 0.5 + 0.5\cos(\pi/(M-1)) & |t| \leq M-1, \\ 0 & \text{其它}, \end{cases} \tag{34}$$
- 其中, M 为窗函数的长度。
- e. 加窗处理后, 计算窗内的 P, e 等参数。

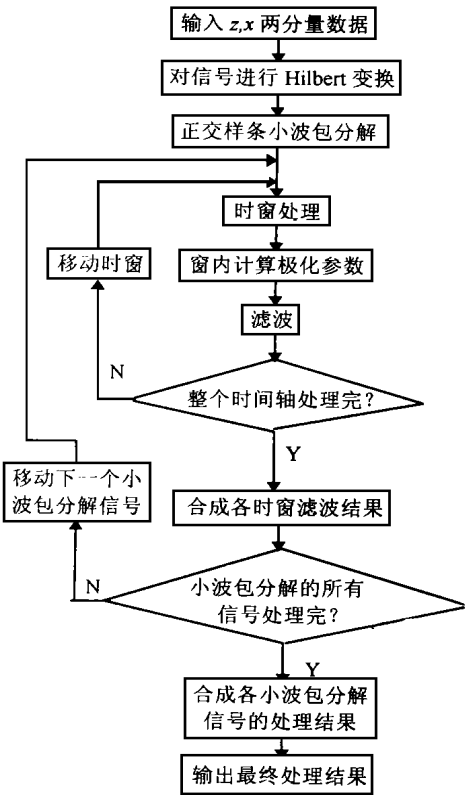


图 1 基于小波包分解的谱矩阵滤波算法流程图

- f. 用(32)、(33)式进行滤波处理。
- g. 重复 d、e、f, 使时窗依次覆盖分解信号的整个时间轴。
- h. 合成该小波包分解信号所有时窗的处理结果。
- i. 重复 d、e、f、g、h, 合成各小波包分解信号的处理结果, 输出最终滤波结果。

5 实例

图 2 为多分量瑞利波测试时在两个观测点记录的三分量信号。图中 1, 2, 3 道分别对应第一观测点的 x, y, z 分量; 4, 5, 6 道分别对应第二个观测点的 x, y, z 分量。每道记录长度为 2 048 点, 采样频率为 2 000 Hz。图 3a、3b 分别为第一观测点 x, z 分量信号的 13 次正交样条小波包 10 层完全分解(Gabor 基)的低频段 50 个节点的分解结果。用本文算法对两个观测点记录信号的 z 分量压制体波和随机干扰、保留瑞利波的滤波结果如图 4 所示, a 是第一个观测点记录的 z 分量信号, b 是 a 的滤波结果; c 是第二个观测点记录的 z 分量信号, d 是 c 的滤波结果。计算时采用 10 层完全小波包分解, 时窗长度为 $N = 16$ (样点数), 滤波函数的参数 $m = 2, n = 3$ 。

6 结论

由于窄带滤波器的选频特性(Q 值)受到限制, 频率分辨率没有小波包分解高, 用窄带滤波器对信号进行滤波时, 通带间的相互重叠, 使得信号经窄带滤波器滤波后, 信号增益发生了变化, 即使使用实际增益对结果进行校正, 在不进行后续滤波处理的情况下, 重构后(窄带滤波器用零相位滤波器)的信号在开始和结束处出现高频噪声, 更何况在用极化滤波对信号处理后, 更无法对分解时滤波器的增益进行校正。用正交对称小波包变换则完全解决了这一问题。

在频域小波包分解, 时域用汉宁窗进行局部化

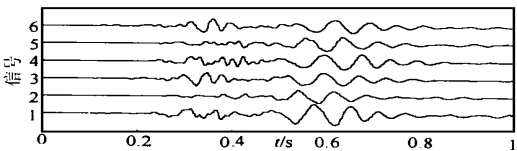


图 2 两观测点三分量记录的原始波形

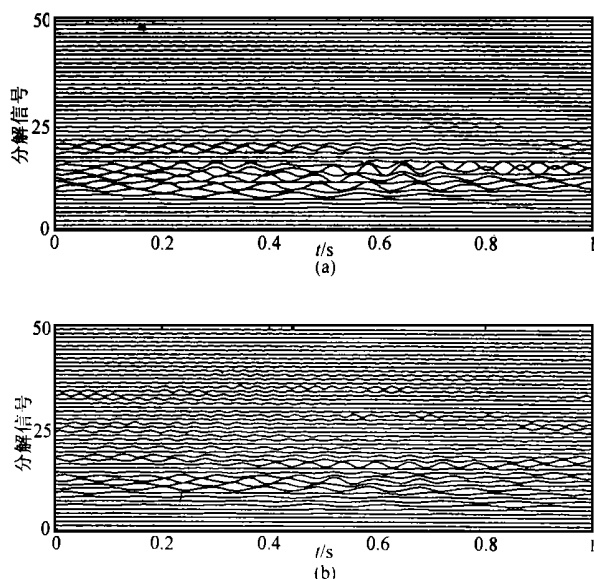


图 3 接收点 1 三分量记录的 13 次正交样条
小波包分解结果
a—x 分量; b—z 分量

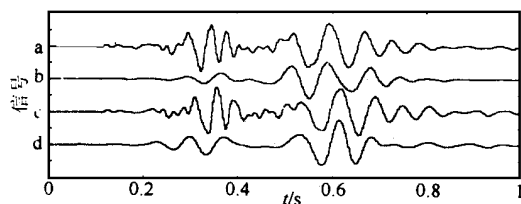


图 4 基于小波包变换的空间滤波法的滤波结果

处理的时—频分解基础上,进行谱矩阵极化滤波,既可进行波场分离,又可压制噪声,且滤波结果非常稳定。实际计算表明,时域分解时窗的长度对计算结果影响很小,该方法是进行 P 波和 SV 波分离、面波勘探时的面波提取等十分有效的方法之一,也可用于光学、地磁脉动等微小信号的处理。

本方法不足之处,计算速度较慢,作者目前正致力用小波变换进一步改进其算法,另一方面研究并行算法程序的实现。

参考文献

- 1 Born M, Wolf E. Principles of Optics—Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Pergamon Press, 1980; 23~35
- 2 Shieh C F, Hermann R B. Ground roll: Rejection Using Polarization Filters. Geophysics, 1990; 55(9): 1216~1222
- 3 刘贵忠, 宗涛, 章柯等. 利用纵向小波包变换和横向多项式拟合提高地震信号的信噪比和分辨率. 石油地球物理勘探, 1995; 30(5): 584~592
- 4 Fowler R A, Kotick B J. Polarization Analysis of Natural and Artificially Induced Geomagnetic Micropulsations. Journal of Geophysical, 1987; 11: 287~2883
- 5 Goodman J W. Statistical Optics. John Wiley & Sons, Inc. 1985; 120~137

(收稿日期 1998-03-19)

STUDY ON THE SIGNAL SEPARATION USING SPACE FILTERING METHOD BASED ON WAVELET PACKAGE TRANSFORM

Li Jinfei Li Renhou (Xi'an Jiaotong University)

Abstract Using the wavelet package analysis, the better localization property is possessed simultaneously in time domain and frequency domain. After the wavelet package transform of signal is conducted, the space movement property of particle is calculated by spectral matrix method, constituting the corresponding filtered function. The decomposed signal is filtered, the filtered results are reconstituted by reverse wavelet package transform. The objectives of filtering the interference and reserving the effective signal are realized, obtaining the satisfactory effectiveness.

Keywords wavelet package; orthogonal spline; spectral matrix; signal processing; space filtering