

· 煤田物探 ·

线源频率电磁测深二维正演(一)*

阎述 (西安交通大学电子与信息工程学院微波与光通信研究所 710049)

陈明生 (煤炭科学研究院西安分院 710054)

摘要 随着频率电磁测深(包括可控源声频大地电磁测深 CSAM T)的深入发展,必然要进行三维情况下的研究。线源频率电磁测深二维正演模拟研究为最终实现三维正演打下了基础。

关键词 频率电磁测深法 二维模型 有限元法 正演

中国图书资料分类法分类号 P631. 325

作者简介 阎述 女 44岁 博士研究生 高级工程师 电磁场与微波技术

1 引言

一切电磁场问题,严格地说来都应在三维空间内进行分析和讨论,电磁法勘探也是如此。由于地层的结构在许多情况下可看成是无限大的水平均匀分层媒质,因此可做为一维情况下的电磁场进行分析计算,这种近似取得了很好的效果。对于有源电磁法勘探来讲,当把一维情况下得出的结论应用到二维、三维时,则出现了各种各样的问题:如静态效应、场源效应、地形影响、记录点等,这就有了各种校正的要求与方法。实际上这些校正都是从一维角度出发的,就是将实际由二维、三维(更多的是三维)情况下得到的电磁场数据校正到一维时的响应形态,然后再用一维的方法去解释,得出地质结论。这些校正方法都取得了不少研究成果,也取得了很好的实用效果,同时也存在一些问题。因此应进一步研究二维、三维情况下电磁场的响应特征,以适应日趋复杂的地质勘探任务。我们在国家自然科学基金项目“复杂三维地电模型电偶源频率电磁测深有限元正演模拟”中,就进行了这方面的工作。在文献[1]中我们对一维的方法理论应用于二、三维而引出的问题做了分析,作为向三维的过渡,我们探讨一下二维地电断面的情况。

* 国家自然科学基金资助项目 (49674239)

2 线源频率电磁测深二维有限元方程

2.1 电磁场方程的建立

对于水平电偶极子电磁勘探来讲,场是三维的;当地电模型为二维时,场仍是三维的,这就是二维模型三维场即二维半问题^[2]。此时需在平行于构造方向作傅立叶变换,将二维模型三维场变换为二维模型二维场,进而求解。然后再通过傅立叶逆变换将求解结果变成二维模型三维场响应。而如果将水平电偶极沿地层走向延伸到无限远,电偶极源变成了线源,那么对于二维地电模型来说场也就是二维的了,如图 1

此问题的求解区域包括空中与地下两部分。其中设大地为分区均匀、线性、各向同性、时不变的导电媒质,则含源情况下谐变电磁场(取谐变因子为 e^{-iky})微分形式的麦克斯韦方程组为:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_t + \vec{J}_c - ik\vec{D}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = ik\vec{B}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (4)$$

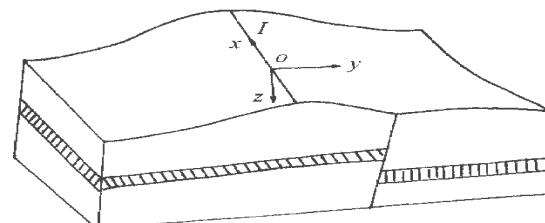


图 1 二维地电模型与坐标系

媒质特征方程为:

$$\vec{D} = \vec{X}\vec{E}, \quad (5)$$

$$\vec{B} = -\vec{H}, \quad (6)$$

$$J_c = e\vec{E} \quad (7)$$

媒质分界面上的边界条件为:

$$H_2 - H_{1t} = 0, \quad (8)$$

$$E_2 - E_{1v} = 0, \quad (9)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (10)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 0 \quad (11)$$

对(2)式两边取旋度,并考虑(1)及(4)~(7)式后可得电场的矢量非齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = -ik_- J, \quad (12)$$

式中 $k^2 = k_-^2 - ik_- e$

取直角坐标如图 1 所示,电场 E_x 分量^[3]的标量非齐次亥姆霍兹方程为:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = -ik_- J_x \quad (13)$$

(13)式中电流密度 J_x 可用供入地下的电流 I 和 W 函数表示,那么最后有:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = -ik_- I W(y) W(z) \quad (14)$$

2.2 对应的等价变分问题

根据变分原理^[4],对于公式(14)可构造如下泛函:

$$\begin{aligned} I[E_x] &= - \int_K \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x \right) E_x \right] dK \\ &\quad - \int_K 2E_x [ik_- I W(y) W(z)] dK \\ &= - \int_K \left[\frac{1}{2} (\nabla^2 E_x + k^2 E_x) E_x \right] dK \\ &\quad - 2ik_- \int_K W(y) W(z) E_x dK \\ &= - \int_K \left[\frac{1}{2} (E_x \nabla^2 E_x + k^2 E_x) E_x \right] dK \\ &\quad - 2ik_- \int_K W(y) W(z) E_x dK \end{aligned} \quad (15)$$

式中的右端项对应于亥姆霍兹方程的泛函。若函数 $E_x \nabla E_x$ 具有一阶连续导数,则可应用格林定理,使(15)式中的被积函数降阶。

对恒等式^[5]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla \cdot E_x \nabla E_x &= -\frac{1}{2} E_x \nabla \cdot \nabla E_x + \frac{1}{2} \nabla E_x \cdot \nabla E_x \\ &= -\frac{1}{2} E_x \nabla^2 E_x + \frac{1}{2} |\nabla E_x|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

的两边进行面积分,且应用高斯散度定理,有

$$\begin{aligned} &- \int_K \nabla \cdot E_x \nabla E_x dK \\ &= - \int_L E_x \nabla \cdot E_x \cdot \vec{dl} \\ &= - \int_K (E_x \nabla^2 E_x + |\nabla E_x|^2) dK, \end{aligned} \quad (17)$$

经移项,

$$\begin{aligned} &- \int_K \frac{1}{2} E_x \nabla^2 E_x dK \\ &= \int_K \frac{1}{2} |\nabla E_x|^2 dK - \int_L E_x \Delta E_x \cdot \vec{dl} \end{aligned} \quad (18)$$

将公式(18)代入上面泛函(15)式中,经整理后有:

$$\begin{aligned} I[E_x] &= - \int_K \left[\frac{1}{2} |\nabla E_x|^2 - \frac{1}{2} k^2 E_x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2ik_- I W(y) W(z) E_x \right] dK \\ &\quad - \int_L E_x \nabla \cdot E_x \cdot \vec{dl} \\ &= - \int_K \left[\frac{1}{2} |\nabla E_x|^2 - \frac{1}{2} k^2 E_x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2ik_- I W(y) W(z) E_x \right] dK \\ &\quad - \int_L E_x \Delta E_x \cdot \hat{n} dl \\ &= - \int_K \left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right)^2 + k^2 E_x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2ik_- I W(y) W(z) E_x \right] dy dz \\ &\quad - \int_L E_x \frac{\partial E_x}{\partial n} dl \end{aligned} \quad (19)$$

上面的推导是在均匀媒质中进行的。在我们所研究的场域中,存在有分区均匀媒质情况,这时单一媒质区域仍可用方程(19)描述,但在媒质分界面上应通过界面上的边界条件相联系^[5]。

在图 2 所示的两种均匀媒质中,分别使用恒等式(16)和高斯散度定理

在区域 K_1 中有:

$$\begin{aligned} &- \int_{K_1} \nabla \cdot E_{x1} \nabla E_{x1} dK \\ &= \int_{L_1^+ L_0^-} \frac{1}{2} E_{x1} \nabla \cdot E_{x1} \vec{dl} \\ &= \int_{K_1} \frac{1}{2} [E_{x1} \nabla^2 E_{x1} + |\nabla E_{x1}|^2] dK; \end{aligned} \quad (20)$$

在区域 K_2 中有:

$$\begin{aligned} &- \int_{K_2} \nabla \cdot E_{x2} \nabla E_{x2} dK \\ &= \int_{L_2^+ L_0^-} \frac{1}{2} E_{x2} \nabla \cdot E_{x2} \vec{dl} \end{aligned}$$

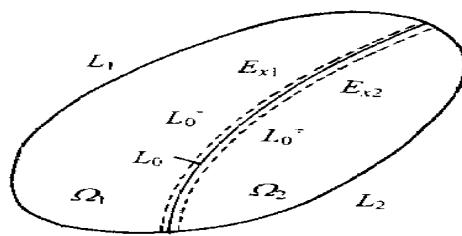


图 2 两种媒质的分界面

$$= \int_{K_2} \frac{1}{2} [E_{x_2} \nabla^2 E_{x_2} + |\nabla E_{x_2}|^2] dK \quad (21)$$

在上面(20)、(21)两式中, L_0 表示两种媒质的分界面; L_0^- 表示位于 K_1 内无限接近于 L_0 的分界面; L_0^+ 表示位于 K_2 内无限接近于 L_0 的分界面。由于 L_0^- 和 L_0^+ 的正法线方向相反, 那么将(20)、(21)两式中的线积分项相加后有

$$\begin{aligned} & \int_{L_1^+ L_0^- L_1^-} \frac{1}{2} E_{x_1} \nabla E_{x_1} \cdot \vec{dl} \\ & + \int_{L_2^+ L_0^+ L_2^-} \frac{1}{2} E_{x_2} \nabla E_{x_2} \cdot \vec{dl} \\ & = \int_{L_1} E_{x_1} \frac{1}{2} \frac{\partial E_{x_1}}{\partial n} dl \\ & + \int_{L_2} E_{x_2} \frac{1}{2} \frac{\partial E_{x_2}}{\partial n} dl + \int_{L_0} (E_{x_1} \frac{1}{2} \frac{\partial E_{x_1}}{\partial n} \\ & - E_{x_2} \frac{1}{2} \frac{\partial E_{x_2}}{\partial n}) dl \end{aligned} \quad (22)$$

由前面麦克斯韦方程组中(2)式可知:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{ik_-} \nabla \times \vec{E} \\ &= \frac{1}{ik_-} [(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) \hat{x} \\ &+ (\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}) \hat{y} \\ &+ (\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) \hat{z}] \end{aligned} \quad (23)$$

对于二维线源, 场在 x 方向上无变化, 故有

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{1}{ik_-} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ H_z &= - \frac{1}{ik_-} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (24)$$

由图 3 可见 $\angle 1 = 90^\circ - T, \angle 2 = 90^\circ - U$, 则 $\angle 1 = U, \angle 2 = T$, 故有

$$\angle 3 = 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - U, \angle 4 = 90^\circ - U, \quad (25)$$

则 $\angle 3 = T, \angle 4 = U$, 那么 $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - T$ 。

由方向导数定义并考虑到(25)、(26)式可写出

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial n} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} \cos \angle 1 + \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos \angle 2 \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial y} \cos U - \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos T \end{aligned} \quad (27)$$

又因 $H_t = H_z \cos U + H_y \cos T$, 将(23)、(24)、(27)式依次代入后:

$$\begin{aligned} H_t &= - \frac{1}{ik_-} \frac{\partial E_x}{\partial y} \cos U + \frac{1}{ik_-} \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos T \\ &= - \frac{1}{ik_-} (\frac{\partial E_x}{\partial y} \cos U - \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos T) \\ &= - \frac{1}{ik_-} \frac{\partial E_x}{\partial n} \end{aligned} \quad (28)$$

由前面边界条件(8)式 $H_{2t} - H_{1t} = 0$ 及上式(28), 可写出

$$\frac{1}{2} \frac{\partial E_{x_2}}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial E_{x_1}}{\partial n}. \quad (29)$$

再考虑到边界条件(9)式 $E_{2t} - E_{1t} = 0$, 可以看出式(22)右边第三项内边界上的积分为零。由此可见, 对于频率电磁测深及可控源声频大地电磁测深(CSAMT), 当满足边界条件 $H_{2t} - H_{1t} = 0$, 即媒质分界面上的表面电流 $J_{St} = 0$ 时, 不必考虑内边界。对于绝大多数情况, $J_{St} = 0$ 是满足的。这样(20)、(21)两式合并写成:

$$\begin{aligned} & \int_{K_1^+ K_2^-} \frac{1}{2} \nabla \cdot E_x \nabla E_x dK \\ &= \int_{L_1^+ L_2^-} \frac{1}{2} E_x \nabla E_x \cdot \vec{dl} \\ &= \int_{K_1^+ K_2^-} \frac{1}{2} (E_x \nabla^2 E_x + |\nabla E_x|^2) dK, \end{aligned}$$

经移项得:

$$\begin{aligned} & - \int_{K_1^+ K_2^-} \frac{1}{2} E_x \nabla^2 E_x dK \\ &= \int_{K_1^+ K_2^-} \frac{1}{2} |\nabla E_x|^2 dK \\ & - \int_{L_1^+ L_2^-} \frac{1}{2} E_x \nabla E_x \cdot \vec{dl} \end{aligned}$$

可见上式和(18)式完全相似。

由此, 二维线源谐变电磁场方程对应的变分问题为:

$$\begin{aligned} I(E_x) &= \frac{1}{2} \int_K [(\frac{\partial E_x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial E_x}{\partial z})^2 \\ &- k^2 E_x^2 - 2ik_- W(y)W(z)E_x] dy dz \\ &- \frac{1}{2} \int_L E_x \frac{\partial E_x}{\partial n} dl = \min \end{aligned} \quad (30)$$

(待续)