

## · 煤田物探。

文章编号: 1001-1986(2001)02-0048-04

## 电阻率三维复杂结构的快速反演

吴小平<sup>1</sup>, 汪彤彤<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学地球与空间科学系, 安徽 合肥 230026;

2. 安徽省环境保护研究所, 安徽 合肥 230061)

**摘要:** 运用共轭梯度迭代算法解三维反问题中的线性方程组, 并结合求 Jacobi 矩阵  $G$  的 Rodi 算法, 则每次反演迭代仅需一次正演计算, 大大加快了计算速度, 实现了直流电阻率三维快速反演。另外, 由于避免了存储  $G$  和  $G^T G$  所需的庞大存储量, 以及在三维反演中加入光滑约束, 有利于精细网格下的复杂模型反演。

**关键词:** 电阻率; 复杂结构; 三维反演; 共轭梯度

中图分类号: P631.3 22 文献标识码: A

## 1 引言

高密度电法由于其工作效率高、数据密度大、分辨力强, 利于浅层精细结构的电阻率层析成像, 因而在水文、工程、环境、考古等领域得到越来越广泛的应用<sup>[1~6]</sup>。现阶段高密度电法主要是针对地下二维结构的电剖面测量, 而实际浅层探测目标多表现为三维电性结构, 电剖面数据不足以反映其信息。Spitzer(1998)<sup>[7]</sup>通过电阻率法灵敏度矩阵的分析, 揭示了对地下三维结构进行二维反演解释会出现难以把握的偏差。正是由于浅层探测的这一特点, 电阻率三维高密度测量及相应的三维反演方法研究成为该领域关注的前沿课题<sup>[8~12]</sup>。目前常用的电阻率三维观测方式是所谓 E-SCAN 测量, 它将地面上电极按二维网格布置, 每一网格节点上有一电极, 每个电极既是供电极又是测量电极, 假设有  $M$  个电极, 共可测得  $M(M-1)$  个单极—单极电位值, Shore<sup>[13]</sup>阐明了 E-SCAN 测量数据是三维的, 需要三维反演解释。

对于电阻率三维反演, 正演是反演的基础, 而任意地电模型的三维正演只能通过有限差分法<sup>[14]</sup>、有限单元<sup>[15]</sup>等求得数值解, 这样三维反演求解的参数就是为数非常多的三维网格单元的电阻率, 尽管三维有限差分正演由于引入预条件共轭梯度法而取得很大进展<sup>[16, 17]</sup>, 然而如此多的反演参数, 必然在偏导数矩阵  $G$  (Jacobi 矩阵) 的计算、存储以及反演的稳定性、可靠性方面, 给电阻率三维反演带来相当大

的困难。

共轭梯度 ( $CG$ ) 方法是解大型最优化问题的最有效方法之一, 它可以避免电阻率三维反演中偏导数矩阵  $G$  的直接计算及其存储, 加快了反演的计算速度, 所需内存也大为减少; 另一方面, 由于反演参数太多及其电阻率可能变化达几个数量级, 在最小二乘准则中加入平滑度约束, 有效地消除了多余构造信息, 改善了反演非唯一性, 对于较细网格单元的复杂模型反演, 亦得到与实际情况非常接近的稳定可靠的反演结果。

## 2 反演方法

电阻率三维反问题的阻尼最小二乘反演可表示为一般形式:

$$[G^T G + \alpha I] \Delta m = G^T \Delta d \quad (1)$$

式中  $G$  —— Jacobi 矩阵;

$\alpha$  —— 阻尼因子;

$I$  —— 单位矩阵;

$\Delta d$  —— 观测数据  $d^{obs}$  和正演理论值  $d_0$  的残差向量;

$\Delta m$  —— 初始模型  $m_0$  的修改向量。

对于三维问题, 将模型剖分成  $n_x \times n_y \times n_z$  的三维网格, 反演要求的参数就是各网格单元内的电导率  $e$  值, 三维反演的观测数据则是 E-SCAN 测量的单极—单极电位值  $H^{obs}$ 。由于它们变化范围大, 一般用对数来标定反演数据及模型参数, 即  $d = \ln H^{obs}$  及  $m = \ln e$ , 有利于改善反演的稳定性。用(1)式反演往

往导致所谓多余构造<sup>[18]</sup>, 即数据本身所不要求的或者说是不可分辨的构造信息, 许多情况下即便理论数据与观测数据拟合很好, 反演结果却与实际电性分布相差甚远。诸多研究表明, 平滑度约束反演可有效改善解的非唯一性<sup>[18, 19]</sup>, 取得较好的反演结果。

电阻率三维平滑度约束反演形式为:

$$[\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda (\mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_z)] \Delta \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{d} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$  分别是模型在  $x, y, z$  方向的粗糙度矩阵, 其表达式见文献 [18]。解此方程组求得  $\Delta \mathbf{m}$ , 对初始模型  $\mathbf{m}_0$  修改后进行迭代, 直到满足收敛准则。

通常, 解(2)式方程组需完全求得偏导数矩阵  $(\mathbf{G})_{MM \times N}$ , 然而三维反演要求的参数有  $N = (n_x - 1) \times (n_y - 1) \times (n_z - 1)$  个,  $M$  个电极的 E-SCAN 观测数据个数为  $MM = M(M - 1)$ , 因此求  $\mathbf{G}$  的计算量非常大, 而且存储  $\mathbf{G}$  所需内存也大大超出了目前微型机存储能力, 导致直接解(2)式困难重重。

共轭梯度(CG)方法是解大型方程组的最有效方法之一, 用 CG 方法解(2)式的方程组, 可避免上述问题, 形成的电阻率三维平滑度约束反演共轭梯度算法如下:

令  $k = 1$  to  $nmax^{INV}$

$\mathbf{m}_k$ ,

$$\mathbf{d}_0^{(k)}, \Phi^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, M),$$

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^{(obs)} - \mathbf{d}_0^{(k)},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{d},$$

$$\Delta \mathbf{m}_k^{(0)} = 0; \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b}; \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)};$$

令  $i = 1$  to  $nmax^{CG}$

$$\mathbf{H}\mathbf{p}^{(ii)} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda (\mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_z)] \mathbf{p}^{(ii)}$$

$$= \mathbf{G}^T \mathbf{Y} + \lambda (\mathbf{R}_x^T \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y^T \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z^T \mathbf{R}_z) \mathbf{p}^{(ii)},$$

其中,  $\mathbf{Y} = \mathbf{G}\mathbf{x}$   $\mathbf{x} = \mathbf{p}^{(ii)}$ ,

$$\mathbf{t}^{(ii)} = (\mathbf{r}^{(ii)}, \mathbf{r}^{(ii)}) / (\mathbf{p}^{(ii)}, \mathbf{H}\mathbf{p}^{(ii)}),$$

$$\Delta \mathbf{m}_k^{(ii+1)} = \Delta \mathbf{m}_k^{(ii)} + \mathbf{t}^{(ii)} \mathbf{p}^{(ii)},$$

$$\mathbf{r}^{(ii+1)} = \mathbf{r}^{(ii)} - \mathbf{t}^{(ii)} \mathbf{p}^{(ii)},$$

$$\mathbf{U}^{(ii)} = (\mathbf{r}^{(ii+1)}, \mathbf{r}^{(ii+1)}) / (\mathbf{r}^{(ii)}, \mathbf{r}^{(ii)}),$$

$$\mathbf{p}^{(ii+1)} = \mathbf{p}^{(ii+1)} + \mathbf{U}^{(ii)} \mathbf{p}^{(ii)}$$

End of loop on (CG) step

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \Delta \mathbf{m}_k$$

End of loop on inversion iterations

其中  $nmax^{INV}$ 、 $nmax^{CG}$  分别是给定的最大非线性反演迭代次数和 CG 迭代次数。可以看出, 反演算法避免了直接求  $\mathbf{G}$  以及  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  的逆矩阵, 只需  $\mathbf{G}$  与任一向量  $\mathbf{x}$  的乘积  $\mathbf{G}\mathbf{x}$  及  $\mathbf{G}^T$  与任一向量  $\mathbf{y}$  的乘积

$\mathbf{G}^T \mathbf{y}$ 。针对 E-SCAN 数据的电阻率三维反演, 吴小平 (1999)<sup>[21]</sup> 详细讨论了利用一次正演计算得到的  $\mathbf{M}$  个向量  $\Phi^{(i)}$  求取  $\mathbf{G}\mathbf{x}$  及  $\mathbf{G}^T \mathbf{y}$  的 Rodi 方法, 则由  $CG$  迭代可求得  $\Delta \mathbf{m}$ , 然后修改初始模型  $\mathbf{m}_k$ , 重新迭代直到满足收敛标准, 反演迭代结束。这样实现了每次非线性反演迭代只需一次正演计算, 大大加快了反演的计算速度。而且, 也没有  $\mathbf{G}$  及  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  的巨大存储量问题, 有利于较细网格参数单元的复杂模型反演。

### 3 理论模型的合成数据反演结果及分析

#### 3.1 理论模型

在电阻率为  $100 \Omega \cdot m$  均匀介质中, 同时存在一个高阻和一个低阻三维长方体, 大小均为  $20 m \times 40 m \times 20 m$ , 顶部埋深也都是  $10 m$ , 电阻率分别为  $400 \Omega \cdot m$ 、 $10 \Omega \cdot m$ , 如图 1 所示。其中图 1(a) 是模型的垂直断面 ( $xoz$  平面), 图 1(b) 是电性分界线在地面 ( $xoy$  平面) 的投影, 同时也标出了地面上 E-SCAN 测量的 121 个电极位置, 相邻电极间距为  $10 m$ 。设计该模型是为了比较三维电阻率反演对高阻和低阻体的分辨情况, 也是为了考察其能否分辨在横向相隔一定距离的两个不均匀体。

#### 3.2 合成数据

对图 1 的模型做三维有限差分正演<sup>[17]</sup>, 网格是  $39 \times 39 \times 20$ , 较精确地求得单位点电源的 E-SCAN 合成数据用于三维反演。这里仅选择了在图 1(b)

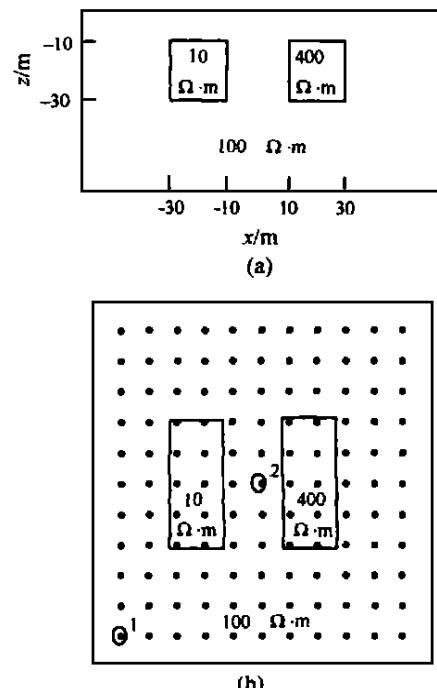


图 1 模型及 121 个 E-SCAN 测量电极位置示意图

a—模型的  $xoz$  垂直断面; b—模型的  $xoy$  水平截面

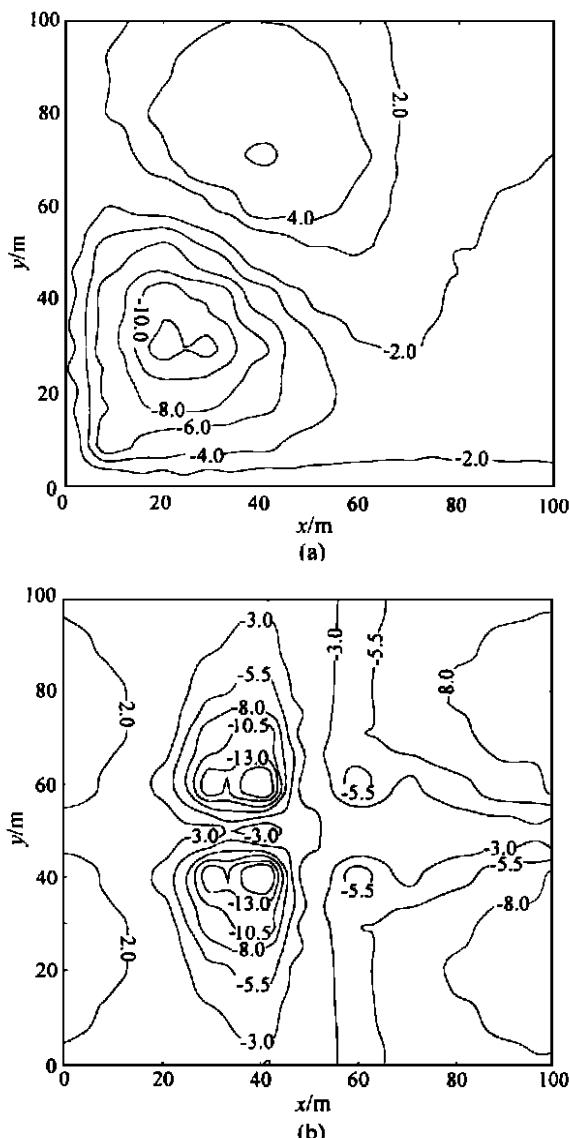


图 2 电位值与正常电位值的相对百分差

a——供电极在点“1”; b——供电极在点“2”

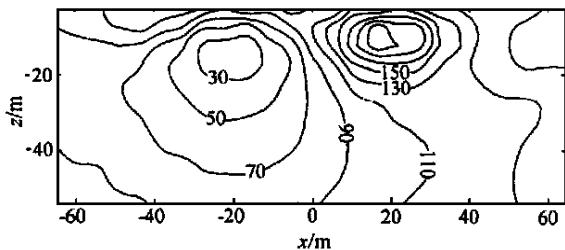
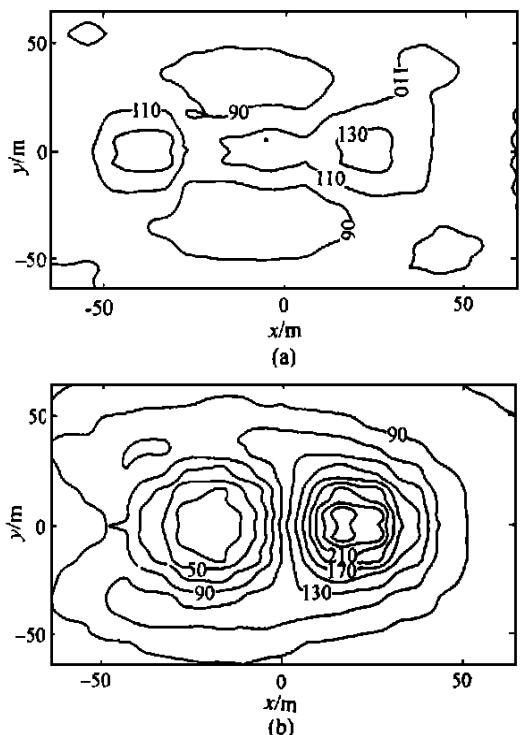


图 3 反演结果的垂直断面图

中以“圆圈”所示的两个位置供电时测得的电位值作图示,图 2(a)和图 2(b)是其异常电位分布,描述与正常电位值的相对百分差。图 2(a)中的变化幅度可达 $-10\%$ ,图 2(b)中的变化幅度可达 $-18\%$ 。可见,相对正常电位分布,该模型产生了明显电位异常分布。但要重建真实模型结构,还需对全部合成数据进行三维反演才能得到。

图 4 反演结果在  $z$  处的水平截面图a—— $z = 4$  m 水平截面; b—— $z = 16$  m 水平截面

### 3.3 反演结果与分析

反演从 $50\Omega \cdot m$ 均匀介质的初始模型出发,网格是 $29 \times 29 \times 20$ ,取 $\lambda = 0.05$ , $n_{max}^{CG} = 16$ ,每次反演迭代约需 1.5 h (Pentium 300, N DP-Fortran 编译),反演迭代 7 次后收敛。三维反演结果见图 3 和图 4,其中图 3 是反演模型的垂直断面图( $xoz$ 平面),反演出左边的低阻体电阻率值最低达 $12\Omega \cdot m$ ,与其真电阻率 $10\Omega \cdot m$ 相比相差较小;反演出右边的高阻体电阻率值最大 $220\Omega \cdot m$ 左右,与其真电阻率 $400\Omega \cdot m$ 相差较大。另外,反演出右边的高阻体与真实模型相比位置上浅了一些,而左边低阻体的位置基本准确。反映了在该垂直断面上,三维电阻率反演对低阻体的分辨较高阻要好,与 Ellis & Oldenburg(1994)<sup>[22]</sup>的结论是一致的。

图 4(a)、4(b)分别是反演模型在 $z = 4$  m、 $16$  m 处的水平截面图( $xoy$ 平面),由图 4(a)可见,整个截面上大部分区域的电阻率值约 $100\Omega \cdot m$ ,其它区域的电阻率变化范围也很小,反映了真实模型在 $z = 4$  m 处的水平截面电阻率是 $100\Omega \cdot m$ 的均匀介质;由图 4(b)可见,该截面反映了在约 $100\Omega \cdot m$ 的均匀介质中,明显存在有一低阻和一高阻的电阻率异常,其电阻率值和上述情况一样,低阻与真电阻率误差较小,而高阻与真电阻率相差较大。不过,在水平截面上反演模型中不均匀体的位置、形状、大小与真

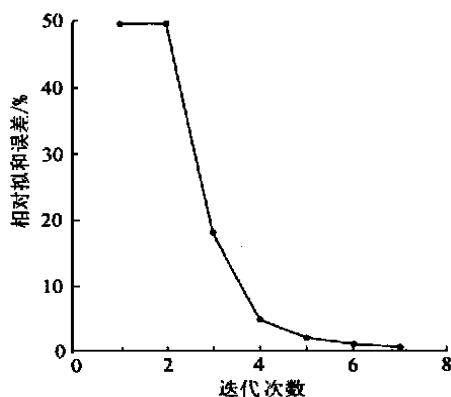


图 5 合成数据反演迭代的收敛过程

实模型是基本一致的。显然, 反演在水平截面上的分辨(包括对不匀体的位置、形状、大小的分辨)较垂直断面要好, Pan & Van(1991)<sup>[23]</sup>也有相同的结论。我们认为, 主要原因是 E-SCAN 测量在地面上的二维网格进行, 因而其观测数据对于横向的不均匀性的反映更为直接; 而对垂向的不均匀性的反映则是通过加大电极距来渐渐增大探测深度, 且由于电位测量是体积效应, 影响探测深度的具体因素除主要与电极距大小有关外, 还与其它的影响因素有关, 因而 E-SCAN 地面测量对垂向不均匀性的分辨是间接的, 分辨率自然要低。

从模型合成数据的三维反演结果可见, 无论在图 3 的垂直断面图上, 还是在图 4 的水平截面图上, 均能较为准确地分辨出相隔一定距离的两个不均匀体, 说明平滑度约束反演方法对于有多个电性不均匀体的复杂模型反演, 可以取得好的分辨效果。图 5 是取  $\lambda = 0.05$  的反演迭代过程中, 理论数据与合成数据的相对拟合误差  $Rms\%$  随迭代的下降曲线, 在  $Rms\%$  下降至 1.0% 左右达到收敛。可见, 反演是稳定收敛的。

另外, 反演用的三维网格与产生合成数据的正演网格不同。这里三维反演网格在  $x$ 、 $y$  方向的节点由 E-SCAN 测量的网格节点决定, 而  $z$  方向的节点剖分是任意的, 仅考虑正演精度而在地表附近较密, 往下渐渐放稀, 不考虑电性界面位置。这一点对于实际数据反演很重要, 因为地下电性界面位置本是未知的。这也说明平滑度约束反演对电性界面复杂的模型有很好的适应性。

#### 4 结论

a. 由于在电阻率三维反演中运用了共轭梯度迭代技术, 避免了偏导数矩阵  $G$  的直接求取及其存储的庞大内存需求, 在微机上实现了电阻率三维复杂结构的快速反演。

b. 平滑度约束反演是稳定收敛的, 反演迭代至一定数据拟合精度后求得的光滑模型比较准确地反映了真实模型的电性结构, 没有产生会导致错误解释的多余构造信息。

c. 关于初始模型的选取、 $\lambda$  及  $n_{max}^{CC}$  的取值对反演结果的影响, 将另文讨论。

#### 参考文献

- [1] Yadav G S, bolfazli H. Geoelectrical soundings and their relationship to hydraulic parameters in semiarid regions of Jalore, northwestern Indian [J]. J. App. Geophysics, 1998, 39(3-5): 51.
- [2] Kayabali K, Yuksel F A, Yeken T. Integrated use of hydrochemistry and resistivity methods in groundwater contamination caused by a recently closed solid waste site. Environmental Geology [J]. 1998, 36(3-4): 227~ 234.
- [3] Frangos W. Electrical detection of leaks in lined waste disposal ponds [J]. Geophysics, 1997, 62(6): 1737~ 1744.
- [4] 底青云, 王妙月, 严寿民等. 高密度电阻率法在珠海某防波坝工程中的应用 [J]. 地球物理学进展, 1997, 12(2): 79~ 87.
- [5] Kampke A. Focused imaging of electrical resistivity data in archaeological prospecting [J]. J. App. Geophysics, 1999, 41(2-3): 215~ 227.
- [6] 冯锐, 周维彰, 冯国政等. 层析技术用于考古—山西应县木塔的基础结构 [J]. 地震学报, 1998, 20(2): 201~ 209.
- [7] Spitzer K. The three-dimensional DC sensitivity for surface and subsurface sources [J]. Geophys. J. Int., 1998, 134: 736~ 746.
- [8] 何继善. 电法勘探的发展和展望 [J]. 地球物理学报, 1997, 40(增刊): 308~ 316.
- [9] 庄浩. 三维电阻率层析成像研究 [D]. 中南工业大学博士学位论文, 1998.
- [10] Loke M H, Barker R D. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion [J]. Geophysical Prospecting, 1999, 44: 499~ 523.
- [11] Park S. Fluid migration in the vadose zone from 3-D inversion of resistivity monitoring data [J]. Geophysics, 1998, 63(1): 41~ 59.
- [12] Zhang J, Mackie R L and Madden T R. Three-dimensional resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients [J]. Geophysics, 1995, 60(5): 1313~ 1325.
- [13] Li Y, oldenbergh D W. Approximate inverse mappings in DC problems. Geophys. J. Int., 1992, 109: 343~ 362.
- [14] Dey A, Morrison H F. Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structure [J]. Geophysics, 1979, 44(4): 753~ 780.
- [15] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法 [M]. 北京: 科学出版社, 1994. 131~ 297.
- [16] Smith J T. Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part II: Biconjugate gradient solution and an accelerator [J]. Geophysics, 1996, 61(5): 1319~ 1324.
- [17] 吴小平, 徐果明, 李时灿. 利用不完全 Choleski 共轭梯度法求解点源三维地电场 [J]. 地球物理学报, 1998, 41(6): 848~ 855.

文章编号: 1001-1986(2001)02-0052-03

# 天然交变电场动态特征研究

王齐仁 (湘潭工学院土木系, 湖南湘潭 411201)

**摘要:** 运用电磁波传播理论, 结合实测资料, 分析天然交变电场动态信息的存在, 阐明其形成机理和基本特征, 为辨别和判断天然交变电场异常信息、提高解译成果的可靠性提供理论依据, 对研究地下含水构造、岩溶、堤坝渗漏等地质问题有一定的指导意义。

**关键词:** 交变电磁场; 动态信息; 电磁流体; 堤坝渗漏

中图分类号: P631.3 25 文献标识码: A

## 1 引言

天然交变电场研究的是大地电磁场中的电场分布规律, 通常只利用它的静态特征来划分地电断面, 从寻找固体矿床推广到地下水资源勘查, 取得了较好的地质效果, 但在实际工作中也出现了不少问题, 尤其在找水方面, 成井率不高(一般只有 40%~60%)。笔者经过近十几年的实测、试验, 发现并认识到天然交变电场动态信息的存在及其特征, 对其成因和规律作了初步的理论分析, 希望能为广大物探工作者理解和研究地球物理场信息提供一条新思路。

## 2 动态信息形成机理

### 2.1 电磁波传播规律

地球表面, 大地电磁场可视为垂直入射的平面电磁波, 电场强度  $E$  磁场强度  $H$  磁感应强度  $B$  电位移  $D$  电流密度  $J$  自由电荷体密度  $q$  的关系服从

麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} H &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & \vec{\text{rot}} E &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \vec{\text{div}} D &= q; & \vec{\text{div}} B &= 0 \end{aligned}$$

不同形式的交变电磁波可以分解为谐变电磁波, 在导电介质中遵循:

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{-bz} e^{i(kz - az)}, \\ H &= H_0 e^{-bx} e^{i(kx - az)}, \end{aligned}$$

$$b = k \sqrt{X} \frac{1}{2} [1 + (\frac{1}{kXd})^2 - 1]$$

式中  $z$  —— 传播距离;

$b$  —— 介质对电磁波的吸收系数;

$\mu$  —— 介质的导磁系数;

$X$  —— 介电常数;

$d$  —— 电阻率;

$f$  —— 电磁波的频率。

习惯上取  $W = 1/b$  称为电磁波的趋肤深度(或穿

收稿日期: 2000-10-17

作者简介: 王齐仁(1963—), 男, 湖南浏阳人, 讲师, 从事地球物理勘探教学、科研及混凝土结构检测与质量评价工作。

- [18] DeGroot-Hedlin C, Constable S C. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data [J]. Geophysics, 1990, 55(12): 1613~1624.
- [19] 董清华, 曹俊兴. 井间电阻率层析成像的几个问题研究 [J]. 地球物理学进展, 1998, 13(4): 85~89.
- [20] Hestense M, Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems [J]. J Res. Nat. Bur. Standards, 1952, 49: 409~436.

- [21] 吴小平, 徐果明. 电阻率三维反演中偏导数的求取与分析 [J]. 石油地球物理勘探, 1999, 34(4): 363~372.
- [22] Ellis R G, Oldenberg D W. The pole-pole 3-D DC-resistivity inverse problem: a conjugate gradient approach [J]. Geophys. J. Int., 1994, 119: 187~194.
- [23] Park S K, Van G P. Inversion of pole-pole data for 3-D resistivity structure beneath arrays of electrodes. Geophysics, 1991, 56(7): 951~960.

### Rapid 3-D Resistivity inversion for complicate model

WU Xiao-ping<sup>1</sup>, WANG Tong-tong<sup>2</sup>

(1. University of Science and Technology of China, Department of Earth and Space Science, Hefei 230036, China; 2. Anhui Institute of Environmental Protection, Hefei 230061, China)  
**Abstract** While conjugate gradient(CG) relaxation technique is used to solve the inverse equations and Rodi method is introduced to compute the Jacobi matrix  $G$ , only one forward calculation is required in each inversion iteration, thus the 3-D resistivity inversion is computed much quickly. Additionally, by avoiding huge storage for  $G$  and  $G^T G$  and imposing a smoothness constraint on model, we make a solid base of 3-D resistivity inversion for the complicate structure.

**Key words** resistivity; complicate structure; 3-D inversion; conjugate gradient