

# 用系统理论预测大型岩溶泉流量

煤炭部地质勘探研究所水文地质室邯邢课题组

武汉地质学院水文地质系邯邢科研组

系统理论是从统计通讯技术和自动控制论中建立起来的，后来被广泛地应用于其他科技领域中，在水文学中应用这种理论对水动力学\*、水资源评价与水资源规划等方面的问题进行了研究。

根据对河北峰峰矿区黑龙洞泉群的流量和降水量的多年观测，结果表明泉流量的变化规律与当地降水量规律有明显的一致性，每年流量峰值均滞后于雨季1~2个月，一般泉流量年变幅不大。这些特点取决于含水体本身的水理性质，及所处地区水文地质条件和水动力条件，如一一分析这些因素，将十分复杂，但也有可能将处于一定水动力状态下的含水体当作一个“转换装置”，它起着滞后与调节地下水变化的作用。本文试用线性时不变集中参数系统理论，对泉群流量及其所处水文地质单元的降水量关系作了初步探讨。

## 一、水文地质概述

黑龙洞群泉位于太行山东麓鼓山脚下的奥陶系灰岩层内，有大小三十多个泉组成，出露标高在122米到130米之间，排泄着邯邢地区水文地质单元的石灰岩岩溶水。该水文地质单元，西自涉县断层，东至京广铁路；北起阳邑盆地，南到漳河，其面积约为2300平方公里，灰岩（寒武、奥陶系）出露面积约为1250平方公里。从地貌上看，西高东低，属低山丘陵地形和山前倾斜平原，山的标高一般为400~1000米；中部盆地标高150~240米；东部为山前平原。

单元西部的水文地质边界为涉县断层，以西涉县盆地所受大气降水对本单元没有影响，涉县断层北段西成地区断距变小，两侧地下水虽有联系，但过水量不大。

黑龙洞排泄带以东直至邯郸大断层，由于灰岩含水层深埋于千米以下，岩溶裂隙发育程度减弱，地下径流滞缓，故东泄流量不大，当然，含水层本身在泉群以东接受降水补给更是

---

\* 参见《灰岩储水体水动力的研究》，布林等，译文载《北京地质》，1974年第3期

不可能的了，因为其上被隔水层覆盖着。漳河自涉县至东西蛟口一带，河谷基本由隔水层组成，基岩裂隙水补给河水。自东西蛟口沿漳河向东，灰岩地下水分水岭与漳河并不一致。据现有水文地质资料分析，漳河河床通过灰岩地段时并无显著渗漏。而在雨季洪水期河水暴涨时，河水是否对岸边灰岩含水层补给，尚未作过研究。由于洪峰出现时间是短暂的，因此，即或存在补给，量也不可能太大。北部阳邑盆地之北为古老地层，是天然的水文地质边界，边界外部的降水和地下水对本单元均无补给；其东，活断层、南洛河断层和火成岩体把武安盆地划分成一个独立的水文地质体系，大气降水不进入本单元，其补给的地下灰岩水进入黑龙洞泉群的流量甚微（见图4）。

本水文地质单元，多年平均降水量为580毫米，降水一般集中在七、八月份，两月降水约占全年降水量的60%~80%，月最小平均降水量为零，多在春季月份；月最大平均降水量为720毫米以上，个别测站达1000毫米以上。大气降水是本单元地下水的主要补给来源。

本单元地下含水层，主要是中奥陶统石灰岩岩溶裂隙含水层，其厚度为584米（不包括下奥陶统的白云质灰岩含水层）。山区，即地下水的主要补给区，地下水位年变幅较大，平水年一般为20~30米；丰水年可达60~80米，有的可能还要大些。在径流区，即贮水盆地，其地下水位一般年变幅不大，在2~5米之间，丰水年最大可达20~30米；而且绝大部分处于承压状态。在泉群排泄区，水位年变幅很小，一般不超过一米。

黑龙洞泉群出露于中奥陶统石灰岩地层中，此处地势低凹，岩溶发育，是本单元灰岩地下水的主要排泄地段。泉群最小流量为5.70米<sup>3</sup>/秒，最大为38.5米<sup>3</sup>/秒，平水年的流量一般为7~10米<sup>3</sup>/秒，年变幅不大。泉流量受大气降水的控制十分明显，就是说，降水量的大小和降水时间与泉流量的大小和相应的时间有着密切关系。一般泉流量的增加，滞后降水一个月左右，这说明贮水盆地对降水补给的地下水有一定调节作用。丰水年补给充沛，影响泉水流量达三年之久。通过水文动态的分析和泉水量自然消耗的计算，我们

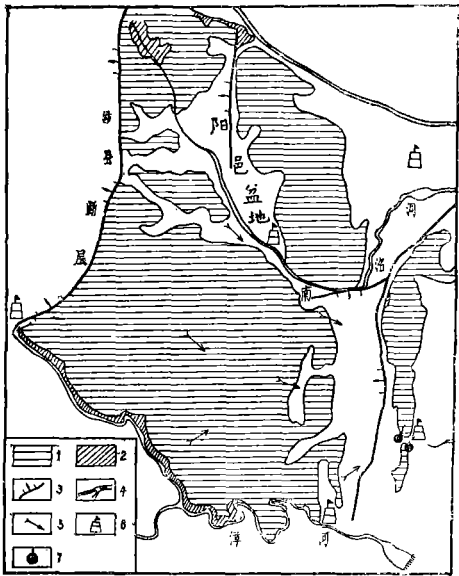


图1 邯邢地区南单元水文地质略图  
1—下古生界灰岩含水层露头  
2—隔水与弱透水路露头  
3—断层 4—河流 5—岩溶水流向  
6—气象站 7—黑龙洞泉

认为一次降水补给的地下水，需要两年半到三年的时间才能基本泄尽，即一次降水对泉水量的影响可达三年左右，约合30~36个月。

## 二、系统理论的基本概念与数学模型的建立

所谓系统即是指一个物理实体（例如含水体、流域等）连同其输入、输出信号而言。

当有输入讯号 $I(t)$ 时，经过实体的物理作用，得出输出讯号 $O(t)$ ，它们之间的数量关系乃是数学上称之为褶积的关系，即：

$$O(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t-\tau) W(t, \tau) d(\tau) \\ \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} I(t-\tau) W(t, \tau) d(\tau) \quad (1)$$

式中， $W(t, \tau)$ 刻划系统的物理特征，通常称为系统的特征函数或权函数，输出 $O(t)$ 称为系统的响应函数。特别当输入信号是单位脉冲迪拉克函数\*时，相应的输出称为单位脉冲响应函数。

若物理实体已处于定常状态，即权函数不依赖于时间 $t$ 而变，则(1)式成为

$$O(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t-\tau) W(\tau) d\tau \quad (2)$$

根据 $\delta$ 函数 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) W(\tau) d\tau = W(t)$ 的性质，可以看出权函数就是单位脉冲响应。由于积分运算是线性运算，所以这种系统称为线性时不变系统。

现将(2)式写成两个积分之和，则为：

$$O(t) = \int_{-\infty}^0 I(t-\tau) W(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} I(t-\tau) W(\tau) d\tau \quad (3)$$

对上式右边的积分作变量置换，並令 $t-\tau=\lambda$  则得

$$O(t) = \int_t^{\infty} I(\lambda) W(t-\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^t I(\lambda) W(t-\lambda) d\lambda \quad (4)$$

由此可见，若把 $t$ 看作现在时间，则输出是由两部分组成的。第一部分是由 $t$ 以后时间的所有输入信息来反映输出 $O(t)$ 的，而第二部分由以前时间的所有输入信息来反映输出 $O(t)$ 的。显然，前者表示“记忆”，后者表示“预测”。

\* 即为 $\delta$ 函数，当 $t \neq 0$ ， $\delta(t)=0$ ， $t=0$ ， $\delta(t)=\infty$

而且  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt=1$ ，

对于系统, 有两个问题应该首先进行讨论。第一是识别问题, 就是通过对输入、输出的分析确定描述系统的参数; 第二是预测问题, 即当任意给定一个输入时, 利用由第一问题所确定的预测方程求出输出预测值。

根据上述水文地质条件及系统理论的要求, 认为本单元具有三个特点:

1. 单元外的大气降水对黑龙洞泉群的流量没有影响, 可以认为是一个单输入;  
2. 鼓山与邯郸大断层之间, 灰岩深埋于千米以下, 岩溶水径流逐渐滞缓, 补给其它含水层及东泄流量不大, 故灰岩水可基本上视为单输出的。

3. 灰岩含水体分布面积广, 厚度大, 贮水盆地灰岩水位年变幅对含水层厚度而言是小的, 并且多处于承压状态。因此, 可以认为含水体的特征函数是不随时间变化的。

综上所述, 我们将贮水盆地同本单元的降水量和泉流量看成是一个线性时不变的单输入、单输出的集中参数系统。

众所周知, 大气降水量是一个随时间变化的不连续的脉冲函数, 通过灰岩含水体这个“转换装置”的调节作用, 由泉群流出的水量却是一个随时间变化的连续函数。如果我们把大气降水看成一个不连续的输入“波”型, 把含水体当作一个“滤波器”(或调节器), 则泉群流量就可视为一个连续的输出“波”型, 那么这一过程也就可看作一个水文地质系统。因此, 输入是降水量, 设为  $U(t)$ , 输出是泉群流量, 设为  $Q(t)$ 。这时, 单位脉冲响应函数实际上就是单位水文图解。

将(4)式赋予水文地质意义后, 即为

$$Q(t) = \int_t^{\infty} U(\lambda) W(t-\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^t U(\lambda) W(t-\lambda) d\lambda \quad (5)$$

对于水文地质系统来讲, 必须考虑其物理可实现性, 即某时刻的泉流量仅与此时刻以前一定时期的降水量有关, 该时期以前的降水量补给的地下水已经通过泉口流出, 而以后的降水量还没有产生影响。也就是说, 当  $\lambda > t$  或  $\lambda < 0$  时,  $U(\lambda) = 0$ , 于是(5)式变成

$$Q(t) = \int_0^t U(\lambda) W(t-\lambda) d\lambda \quad (6)$$

为了实际计算的需要, 须将(6)式离散化, 得:

$$Q(t) = \sum_{\lambda=0}^t U_{\lambda} W_{t-\lambda} \quad (7)$$

在叙述如何确定权序列  $W_{t-k}$ 、 $W_{t-k-1}$ 、 $\dots$ 、 $W_{t-n+1}$ 、 $W_{t-n}$  的方法之前, 我们先解

释一下(7)式的水文地质含意,为了便于解释,可将上式右边之和式作变量置换,若令  $t-\lambda=\tau$ , 于是有

$$Q(t) = \sum_{\tau=0}^t U_{t-\tau} W_{\tau} \quad (8)$$

根据水文地质资料的分析,假定时间以月为单位,即第七月的降水所形成的地下径流从第  $t+k$  月起至第  $t+n$  月止,经过  $n-k+1$  个月全部由泉群流出(这里  $k$  和  $n$  均为整数,且  $n > k \geq 0$ )。因为第  $t-(n+1)$  月及其以前降水所形成的地下径流已通过泉口流出去了,而第  $t-k$  月,第  $t-k-1$  月,一直到  $t-n$  月的降水所形成地下径流的水正在向泉群流动,并决定着泉群流量的大小。所以(8)式应改写为

$$Q_t = \sum_{\tau=k}^n U_{t-\tau} W_{\tau} \quad (9)$$

该式说明第  $t$  月的泉流量  $Q_t$  是由第  $t-n$  月降水形成的部分径流量  $U_{t-n} W_n$  一直到第  $t-k$  月降水所形成的部分径流量  $U_{t-k} W_k$  逐一迭加组成的。由于  $Q_t$  与  $U_t$  的单位不同,故  $W_n, W_{n-1}, W_{n-2}, \dots, W_k$  并不含有百分数的意义。但从(9)式可以看出  $Q_t$  是  $U_{t-n}, \dots, U_{t-k}$  的加权平均,而权分别就是  $W_n, \dots, W_k$ 。这也说明了系统权函数或权序列这个名称的来由。在这里,(9)式便成了我们描述含水体这个“转换装置”的数学模型,并且可用它来进行计算。

### 三、计算方法与步骤

#### 1. 用最小平方估计准则来确定权序列

识别系统的问题就是确定权函数或权序列的问题。根据最小平方估计准则,我们要求误差总和为最小,即:

$$\begin{aligned} \Phi(W_k, W_{k+1}, \dots, W_n) &= \sum_{t=1}^n (Q_t^{\text{计}} - Q_t^{\text{测}})^2 \\ &= \sum_{t=1}^n [U_{t-k} W_k + U_{t-k+1} W_{k+1} + \dots + U_{t-n} W_n \\ &\quad - Q_t^{\text{测}}]^2 = \min. \end{aligned}$$

式中 $N$ 是观测数据的个数,其他符号的含意如前所述。且 $N \geq n > k \geq 0$ 。

$$\text{令 } \frac{\partial \Phi}{\partial W_i} = 0, \quad (i = k, k+1, \dots, n)$$

就得到权序列 $W$ 的线性方程组

$$U^T U W = U^T Q_{\text{测}} \quad (10)$$

式中

$$U = \begin{pmatrix} U_{1-k} & U_{1-k(k+1)} & \dots & U_{1-n} \\ U_{2-k} & U_{2-k(k+1)} & \dots & U_{2-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{N-k} & U_{N-k(k+1)} & \dots & U_{N-n} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_k \\ W_{k+1} \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}, \quad Q_{\text{测}} = \begin{pmatrix} Q_1^{\text{测}} \\ Q_2^{\text{测}} \\ \vdots \\ Q_N^{\text{测}} \end{pmatrix}$$

解此方程组就得到权序列 $W_k, W_{k+1}, \dots, W_n$ 。很明显,这是最小平方的估计意义下最优权序列,有了它,就可以利用任意给定的权序列长度 $m (= n - k + 1)$ 个月的有效降水量资料,按(9)式算出泉群的预测流量来。

## 2. 对降水量和泉流量实测资料的处理

在本单元周围有十几个长期水文气象观测站,出于水文地质原因,现选用五个站的降水量资料。各站年降水量最小相差十几到几十毫米,最大在400毫米以上,一般在200毫米左右。各站控制的补给灰岩地下水的范围,在本单元基本上可视为均等,故月降水量均采用五个站的算术平均值。因为地下水埋藏较深,一般均在30米以上,所以地下水的蒸发问题可以不予考虑。

根据地表土层、植被和岩溶发育情况调查,认为沟谷之集中水流对灰岩地下水的补给是主要的。一般来讲,一次连续降雨在5毫米以上就可产生局部地表积水,而一次连续降雨在10毫米以上就可形成表流。因此,我们对每月逐日降水量进行了处理,把三日连续降水量在20毫米以上,且两日内连续降水量在10毫米以上者算为“有效降水量”(即有补给灰岩地下水能力的降水量)作为计算数据,从而得出各站的逐月降水量,再取其平均值用于计算,而对非有效降水量均作零来处理。

对泉流量的月平均值,因为观测时间的权数基本相等,也采用算术平均值来进行计算。随着工农业的发展,本单元内工、农业及民用取水量日益增加,自1960年至1974年,已从由

近 2 米/秒增加到 3 米<sup>3</sup>/秒左右。根据取水点的分布特点，在计算时也作了适当考虑。

### 3. 权序列长度 $m$ 的确定

所谓“权序列长度”是指某月降水量对泉流量大小起影响作用的时间长短，本文采用月为时间单位，也就是说有多少个月。如果某月降水量自  $k$  月影响泉群流量，至  $n$  月影响消逝，那么权序列长度  $m$  就等于  $n - k + 1$ ，即  $m = n - k + 1$ ，因此，当  $k$  和  $n$  确定之后， $m$  即可确定下来。 $k$  是某月降水后泉流量有明显增加的月数，根据动态曲线来看，降水的当月对泉流量就有影响，但不甚明显，一般第一个月降水对下一个月泉的流量有明显的影 响，所以取  $k = 1$ ； $n$  的大小可以通过水文地质分析和水动态资料来判断确定，本文采用的方法如下：

若将 (8) 式改写成

$$Q_t = \sum_{\tau=0}^{k-1} U_{t-\tau} W_{\tau} + \sum_{\tau=k}^n U_{t-\tau} W_{\tau} + \sum_{\tau=n+1}^t U_{t-\tau} W_{\tau}$$

其右边第一个和式表示降水还没有影响到泉的流量，故应为零；第三个和式表示第  $n+1$  月以前的降水对  $t$  月泉流量的影响，很明显，如果  $n$  选择合适，则第三个和式也应接近于零。若令

$$Q'_t = \sum_{\tau=n+1}^t U_{t-\tau} W_{\tau},$$

则

$$Q_t = \sum_{\tau=k}^n U_{t-\tau} W_{\tau} + Q'_t,$$

由于  $Q'_t$  是一个微小的量，对  $Q_t$  的影响很小，所以可以假定 为一个常量，设该 微小常量为  $a$ ，则  $Q'_t = a$ ，于是

$$Q_t = \sum_{\tau=k}^n U_{t-\tau} W_{\tau} + a \quad (11)$$

对上式用最小平方估计的方法进行处理后，就会得到一个求权函数的正则方程，即：

$$U^T U_1 W_1 = U^T Q_{\text{测}} \quad (12)$$

式中，

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & U_{1-k} & U_{1-(k+1)} & \cdots & U_{1-n} \\ 1 & U_{2-k} & U_{2-(k+1)} & \cdots & U_{2-n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & U_{N-k} & U_{N-(k+1)} & \cdots & U_{N-n} \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} a \\ W_K \\ W_{KH} \\ \cdot \\ \cdot \\ W_n \end{pmatrix}$$

其他符号的意义同前。

用12式，通过试算的办法选择合适的 $n$ ，使 $a$ 达到预先指定的一个微小数值，则相应的一列权系数就是我们所要求的。

#### 4. 对于不合理的权函数的处理

从水文地质意义上讲，权函数均应大于零，但在计算中可能出现一些负值或零值，其主要原因是降水量与泉流量之间的关系不匹配。之所以不匹配，一是泉流量的实测值有较大误差，二是权序列长度过大造成的。另一原因是对降水量中没有形成地下水能力的量也算入了“有效降水量”，因此我们对降水量要进行必要的处理。为了使计算结果能够比较准确预测，首先要使流量观测值准确些，在野外观测和试验的基础上把有渗透能力的降水量下限取准确些，在室内资料整理分析的基础上取好 $k$ 值和 $n$ 值范围，以便减少试算工作量。

在试算过程中，权序列长度过大时，权函数的尾部就会出现零值或负值。此次对黑龙洞泉实测资料的计算中，仅当权长度为37个月时，权函数之末端才出现了一个负值。我们认为试算中要选取最优权序列长度 $m$ ，必须满足两个条件，一是权函数皆为正数，二是实测值与计算值误差最小。

## 四、计算成果及其评价

降水量和泉流量的实测资料经手工处理之后，在108乙机上完成了全部计算工作。线性方程组是用消去法求解的。

系统的认识部分选用了1957年12月份至1967年元月份的降水量资料，1961年元月份至1967年12月份的流量资料，系统的预测部分选用了1964年12月份至1974年11月份的降水量资料、1967年12月以后的零散泉流量资料和1974年6月至12月的泉流量资料。

权序列长度的试算范围为12个月至37个月。通过资料对比，我们认为33个月比较好，其



权函数W的数列见图2。

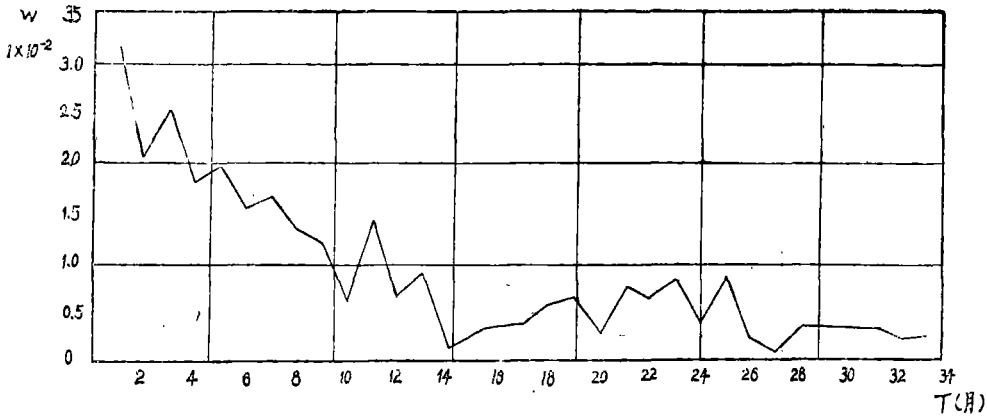


图2. 单位脉冲响应曲线

据(9)式计算表明,计算流量的误差一般均在10%左右,个别较大,是因为洪水期有地表水流混入,或是泉附近集水渗入的结果,主要表现在63年特大洪水期的8月份(图3)。

泉水的预测流量与实测流量误差一般小于10%。

从本次获得的初步计算结果表明,应用线性时不变集中参数系统理论研究黑龙洞泉动态收到了比较满意的效果。所建立的数学模型及计算成果可以用于该泉的流量预报,尤其当今有了降水预报之后,就可相应地预报更长时间的泉流量。我们认为此次方法完全可以使用于类似条件的岩溶泉动态的预测工作。当然,各地区的校长度是不同的,其匹配时间可能是以天或多天,而不是以月为单位的。这要通过当地的野外工作,才能比较合理地予以确定。

可以用系统理论研究的水文地质问题,不限于泉的动态,如大型的供水井区、矿井井下的涌水量等,均可用此方法进行研究,这方面的工作我们仅仅作了初步赏试。当然,水文地质系统大都是属于非线性时变时滞的随机系统,因此,许多问题有待深入研究。

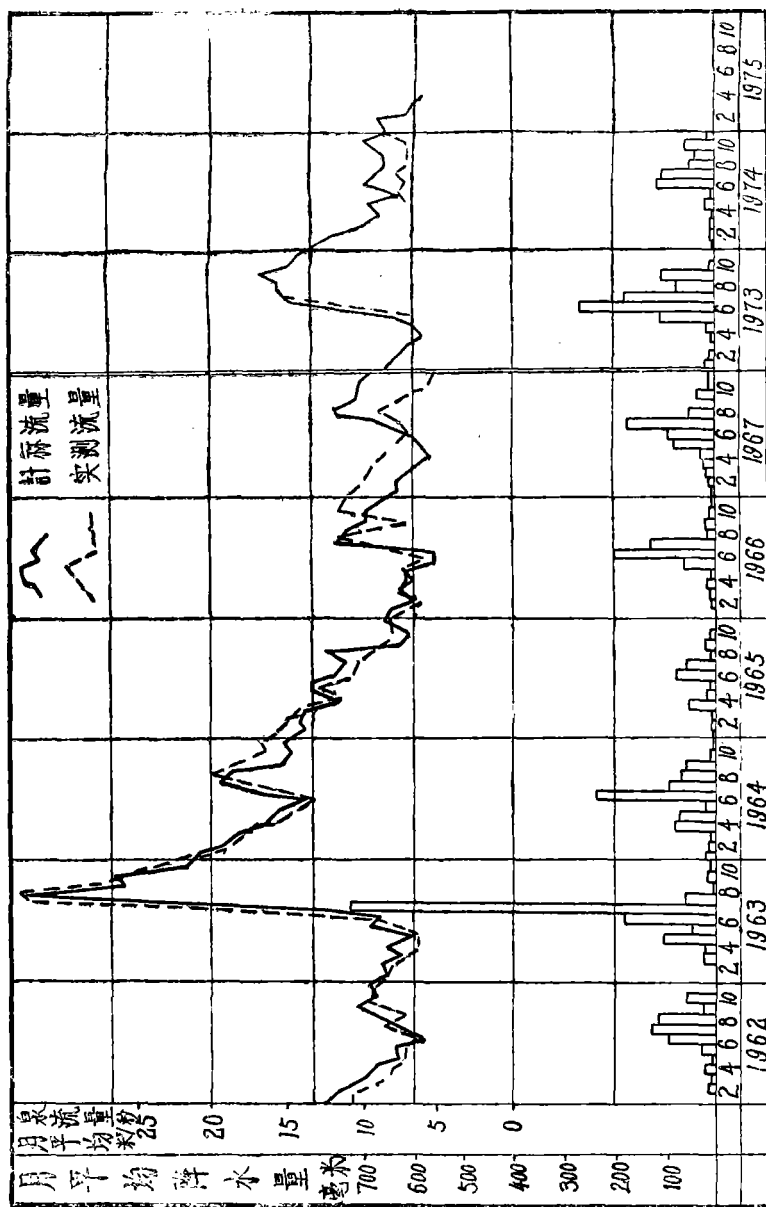


图3. 黑龙河泉群实测流量与计算流量对比曲线图(部分)