

线源频率电磁测深二维正演(二)*

阎述 (西安交通大学电子与信息工程学院微波与光通信研究所 710049)
陈明生 (煤炭科学研究院西安分院 710054)

摘要 随着频率电磁测深(包括可控源声频大地电磁测深 CSAMT)的深入发展,必然要进行三维情况下的研究。线源频率电磁测深二维正演模拟研究为最终实现三维正演打下了基础。

关键词 频率电磁测深法 二维模型 有限元法 正演

中国图书资料分类法分类号 P631.325

作者简介 阎述 女 44岁 博士研究生 高级工程师 电磁场与微波技术

2.3 人工边界条件

地球物理场问题是一个分布在无限空间的开放域问题,当用有限元这种场域无法解开放域问题时,需将无限空间截断为有限空间,在截断处设定人工边界,形成外边界。在求频率测深二维正演问题的数值解时,可将外边界取为矩形,如图 4 所示,在人工边界上确定边界条件,进而求解。

a. 下边界 EF : 在相当深的地下,认为电磁场已衰减为零。因此将下边界取为第一类边界条件

$$E_x|_{EF} = 0. \quad (31)$$

b. 地中侧边界 CE 、 DF : 对于地中侧边界,在离源足够远的地方,也就是远区,可认为是近于均匀

* 国家自然科学基金资助项目(49674239)

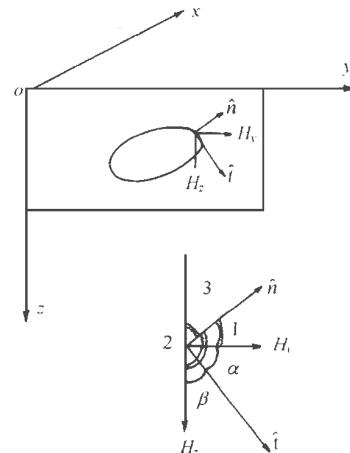


图 3 几何关系

- 3 Torquil Smith. Conservative Modeling of 3-D Electromagnetic Fields. Part II :Biconjugate Gradient Solution ad an Accelerator. *Geophysics*, 1996;61:1319~1324
- 4 吴小平,徐果明. 不完全 Cholesky 共轭梯度法及其在地电场计算中的应用. 石油地球物理勘探, 1998;33(1):89~94
- 5 吴小平,徐果明,李时灿. 利用不完全 Cholesky 共轭梯度法求解

- 点源三维地电场, 地球物理地球学报, 1998;41(6):848~855
- 6 吴小平,徐果明. 利用 ICCG 迭代技术加快电阻率三维正演计算. 煤田地质与勘探 1999;27(3):62~66
- 7 徐世浙. 地球物理中的有限单元法. 北京:科学出版社, 1994: 178~183

(收稿日期 1999-01-12)

ICCG METHOD FOR SOLVING LARGE SPARSE EQUATIONS AND ITS COMPUTER PROGRAMMING

Wu Xiaoping Xu Guoming Li Shican (University of Science and Technology of China)

Abstract In this paper, an efficient method for the computation of critical step in ICCG iteration is put forward, and some necessary programs (in Fortran) are developed for sake of the practical application.

Keywords Large sparse equations; Incomplete Cholesky conjugate gradient(ICCG); resolution; implement

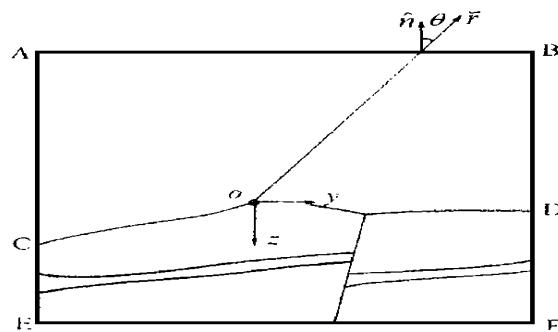


图 4 坐标系和矩形区域

的“平面波”^[1], 这时地中侧边界取为第二类边界条件

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} \Big|_{CE, DF} = 0. \quad (32)$$

c. 空中边界 CABD: 在空中离地下二维地质异常体足够远处, 可将大地的影响做为水平分层大地(一维情况)来考虑, 此时在空中边界上可采用一维吸收边界条件。设在边界上

$$BE_x \Big|_{CABD} = 0, \quad (33)$$

式中 B 是边界算子; 设在空中边界上的场为强度 1 的向外传播的波与经大地反射的波的迭加:

$$E_x = e^{ik_0 r} + R e^{ik_0 r}. \quad (34)$$

R 是反射系数。将上式求导后有

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} = ik_0 e^{ik_0 r} \frac{\partial r}{\partial n} + ik_0 R e^{ik_0 r} \frac{\partial r}{\partial n}. \quad (35)$$

用 $-ik_0 \frac{\partial r}{\partial n}$ 乘(34)式后与(35)式相加得:

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} - ik_0 \frac{\partial r}{\partial n} E_x = 0.$$

$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos \theta$ θ 是矢径 r 和边界外法线方向 n 之间的夹角。将上式与(33)式比较后, 可知边界算子

$$B = \frac{\partial}{\partial n} - ik_0 \cos \theta.$$

故在空中边界上取第三类边界条件

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} - ik_0 \cos \theta E_x \Big|_{CABD} = 0. \quad (36)$$

边界条件(36)式满足一维情况下的 Sommerfeld 辐射条件 $\lim_{r \rightarrow \infty} (\frac{\partial E_x}{\partial r} - ik_0 E_x) = 0$, 这就是吸收边界条件的物理意义。这个边界条件与文献[10]中采用的空中边界条件 $\frac{\partial E_x}{\partial n} - ik_0 \frac{K_1(-ik_0 r)}{K_0(-ik_0 r)} \cos \theta E_x = 0$, 当式中

修正贝塞尔函数中的宗量比较大时是一致的。

2.4 有限元方程

综上所述, 与二维地电模型线源频率电磁测深正演问题对应的泛函极值问题为:

$$\begin{cases} I[E_x] = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} [(\frac{\partial E_x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial E_x}{\partial z})^2 - k^2 E_x^2] dy dz \\ - \int_{\Omega} 2i \omega \delta(y) \delta(z) dy dz - \frac{1}{\mu} \int_{CABD} ik_0 \cos \theta E_x^2 dl, \\ E_x \Big|_{EF} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

在上式中, 关于 δ 函数的积分为:

$$\int_{\Omega} 2i \omega \delta(y) \delta(z) dy dz = i \omega. \quad (38)$$

用有限元无法求解泛函极值问题时, 要将研究的场域剖分成互不重迭的有限个数的单元, 在每一基本单元内, 由结点处的场值(即要求的未知量)表示出的插值函数来逼近各单元内场的分布, 由此将求泛函极值问题变成了求多元函数极值的问题。这样可把(37)式中泛函的面积分表示成每个单元上面积分的总和(如 M 个单元), 将线积分表示成边界单元上边界线积分的总和(如 N 条边界), 即:

$$\begin{aligned} I[E_x] &= \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^M \int_{\kappa_e} [(\frac{\partial E_x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial E_x}{\partial z})^2 - k^2 E_x^2] dy dz \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \int_{e} ik_0 \cos \theta E_x^2 dl - i \omega. \end{aligned} \quad (39)$$

考虑到三角形单元的灵活性和有源情况下对称性的要求, 可采用交叉对称网格(图 5)。其中的基本单元可取为三角形 6 节点单元, 即将三角形顶点及各边中点做为节点, 排列顺序是 i, j, k, I, J, K 。

在三角形 6 节点单元上取 E_x 的二次函数

$$E_x = a_1 + a_2 z + a_3 y + a_4 z^2 + a_5 zy + a_6 y^2, \quad (40)$$

经过计算可求出式(39)中的面积分为:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^M \int_{\kappa_e} [(\frac{\partial E_x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial E_x}{\partial z})^2 - k^2 E_x^2] dy dz \\ &= \sum_{m=1}^M [\mathbf{E}_{xm}^e]^T ([FG] + \frac{k_m^2}{180} [FC]) \mathbf{E}_{xm}^e. \end{aligned} \quad (41)$$

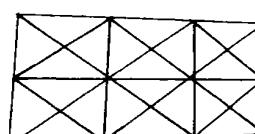


图 5 交叉对称网格与三角形 6 节点单元

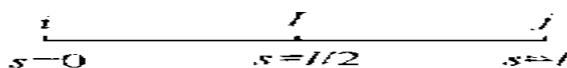


图 6 边界段示意图

为了求式(39)中的线积分,设在一段边界 l 上电场 E_x 是边长的二次函数(图 6) :

$$E_x = b_0 + b_1 S + b_2 S^2,$$

经计算后

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \int_e ik_0 \cos \Theta_x^2 dl \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{ik_0 \cos \theta}{30} [\mathbf{E}_{xn}^e]^T \mathbf{W} \mathbf{E}_{xn}^e \right). \quad (42) \end{aligned}$$

为了求得所讨论泛函极值问题的解,还应求出式(41)与式(42)之和相对节点上未知场值 $E_{xm}^e E_{xn}^e$ 的偏导数,并令其等于零,得到下列有限元方程:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{\mu_m} \mathbf{F} \mathbf{G} - \frac{k_m^2}{180} [\mathbf{F} \mathbf{C}] \right) \mathbf{E}_{xm}^e \\ &+ \sum_{n=1}^N \left(\frac{ik_0 \cos \theta}{30} \mathbf{W} \mathbf{E}_{xn}^e \right) = i \omega \mathbf{J} \end{aligned}$$

$$(\text{源所在节点上}), \quad (43)$$

式中 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{W}, \Delta$ 的具体形式见参考文献[8]。为执行式中的求和,要将各单元矩阵扩充为总体矩阵之后,再把相同位置上的元素迭加。

在求解最终形成的线性方程组过程中,考虑到下一步三维问题巨大的计算量,我们采用了 crout^[9] 分解算法。这样可将系数矩阵分块求解,只要计算机容量满足公共三角块的要求,方程组的求解就可顺利进行。

3 计算结果

3.1 E_x 单分量视电阻率

与以往线源正演计算中使用阻抗视电阻率^[10]不同,我们使用了由单分量电场定义的视电阻率。

已知均匀半空间电场 E_x 分量的表达式为^[11]:

$$E_x = \frac{-\mu \omega \mathbf{J}}{\pi k_0^2 r} [k_1 K_0(-ik_1 r) - k_0 K_1(-ik_0 r)], \quad (44)$$

式中 r —— 场点至源点的距离。

由于 $k_0 \ll k_1, K_1(-ik_1 r) \ll K_1(-ik_0 r)$, 故有

$$E_x \approx -\frac{\mu \omega \mathbf{J}}{\pi k_1^2 r} k_0 K_1(-ik_0 r) = -\frac{ik_0 K_1(-ik_0 r)}{i \pi \sigma},$$

则视电阻率

表 1 精度比较

极距/m	有限元算法/ Ω_m	精确解/ Ω_m	相对误差/%
100	5.71023	5.68087	0.51
200	16.1835	16.2707	0.53
300	28.2327	28.5440	1.10
400	41.5655	41.1120	1.10
600	65.0789	64.4211	1.01
800	83.5934	83.3089	0.34
900	89.8899	90.8455	1.05
1000	97.7941	97.1244	0.68
1200	105.396	106.183	0.77
1400	110.078	111.229	1.04
1600	112.766	113.163	1.24
1800	111.565	112.891	1.18
2000	109.929	111.239	1.18
4600	97.9853	99.7821	1.81
4800	101.931	99.8854	2.02
总平均相对误差			1.04 %

$$\rho = \frac{\pi r | -iE_x |}{k_0 K_1(-ik_0 r)}. \quad (45)$$

3.2 计算精度

表 1 是假设大地为电阻率 $\rho = 100 \Omega \cdot m$ 的均匀媒质,在频率 $f = 64 Hz$ 时,有限元算法与精确式(44)计算结果的比较。由于实际勘查中习惯使用视电阻率,这两种计算结果已由(45)式转换成了视电阻率。其中有限元法单元的边长约为 $1/8$ 波长,下边界约是 3 倍的趋肤深度,上边界是下边界的 1.5 倍。表 1 中所列 15 个测点的总平均相对误差为 1.04%。从总体上讲,有限元算法的计算精度低于边界元^[12]。但用边界元法处理多种媒质是困难的,而有限元法则非常适合于解决多种介质的计算问题。

在均匀半空间情况下,有限元算法与精确解比较,除了检验有限元程序的正确性之外,还有助于确定人工截取的边界的范围及剖分单元的大小,估计最终算出的二维地电模型结果的精度范围。

表 1 中所列视电阻率值将随着场区趋向远区而趋于真电阻率值,下面所举的例子就是在远区场计算的。

3.3 几个算例

图 7~图 10 给出了几个简单二维地电模型的算例,它们分别是倾斜地形、弧形下凹地形、地表不均匀体、低阻直立板状体。由图中可见,当地电模型为二维时,线源频率测深 E_x 分量视电阻率表现出了相应的响应特征。在实际的勘查工作中,二维的情况是少见的。对于二维正演问题计算方法的选择,边界条件的确定,和简单模型的试算,是为点源复杂三维

模型正演做的准备, 以便较为彻底地解决长期以来困扰着频率测深资料处理与解释上的问题。

4 结束语

有限元素法是适合于求解多种媒质中场问题的数值计算方法, 特别是当不同媒质分界面上相应的场分量连续时, 有限元算法可不考虑内边界, 这是有

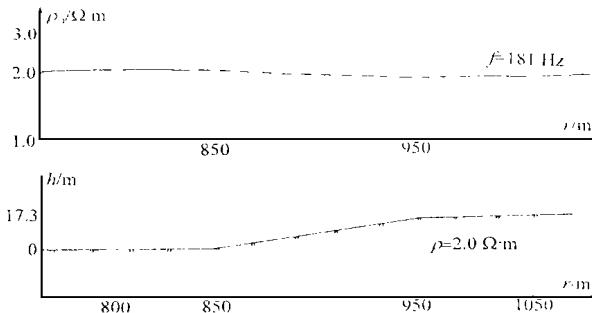


图7 倾斜地形

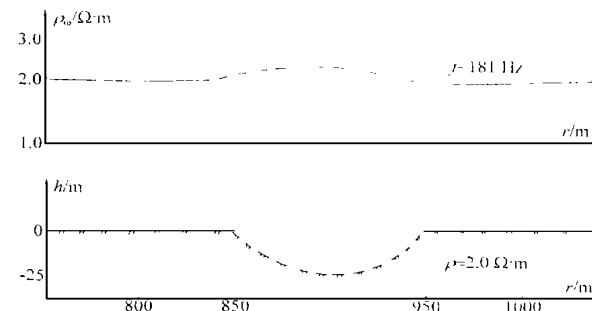


图8 弧形下凹地形

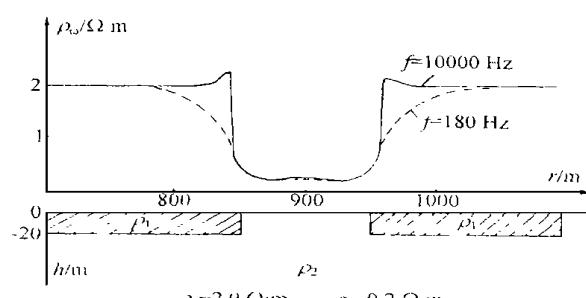


图9 地表不均匀地质体

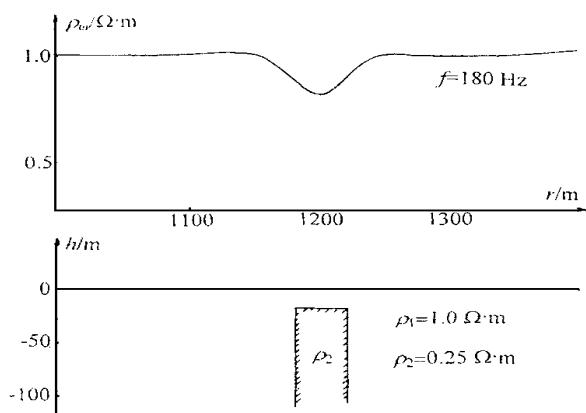


图10 低阻直立板状体

限元方法的显著优点。对于地球物理问题这个条件在绝大多数情况下是满足的。

与大地电磁等无源情况相比, 有源情况下外边界的确定比较困难。吸收边界条件的引入可使空中边界具有明确的物理意义。

参考文献

- 陈明生, 阐述. 论频率测深应用中的几个问题. 北京: 地质出版社, 1995
- 孟永良, 罗延钟. 电偶源 CSAMT 法二维正演的有限单元算法. 勘查地球物理勘探地球化学文集, 第 20 集电法专辑. 北京: 地质出版社, 1996
- 陈明生, 阐述, 陶冬琴. 电偶源频率电磁测深中的 E_x 分量. 煤田地质与勘探, 1998; 28(6): 60~66
- 高应才, 张自立, 周义仓. 应用数学方法. 西安: 陕西科学技术出版社, 1992
- 盛剑霓. 工程电磁场数值分析. 西安: 西安交通大学出版社, 1991
- Engquist B., et al. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. Math. of Comp., 1977; 31(139): 629~651
- 周熙襄, 钟本善. 电法勘探数值模拟技术. 成都: 四川科学技术出版社, 1986
- 陈乐寿, 刘任, 王天生. 大地电磁测深资料处理与解释. 北京: 石油工业出版社, 1989
- 李大潜. 有限元法续讲. 北京: 科学出版社, 1979
- 陈明生, 严又生. 二维水平电偶极变频测深阻抗视电阻率的有限元正演计算. 地球物理学报, 1987; 30(2): 201~208
- 沃德 S H. 地球物理用电磁理论. 北京: 地质出版社, 1978
- 12 阐述, 陈明生等. 频率测深二维地形影响的边界元素法正演模拟. 物探化探计算技术, 1996; 18(4): 310~319

(收稿日期 1999-03-30 续完)

LINE SOURCE FREQUENCY ELECTROMAGNETIC SOUNDING TWO-DIMENSIONAL FORWARD MODELING

Yan Shu (Xi'an Jiaotong University, Microwave and Optical Communication Institute)
Chen Mingseng (Xi'an Branch, CCRI)

Abstract Following the development of frequency electromagnetic sounding (including controlled source audio frequency magnetotelluric sounding) it is essential to study three-dimensional case. Line source 2-D modeling is a base of point source 3-D modeling.

Keywords line source, frequency electromagnetic sounding, two-dimensional geoelectric model, finite element