

文章编号: 1001-1986(2008)03-0059-04

工程中渗流问题的边界元算法与分析

沈军¹, 张建²

(1. 煤炭科学研究院西安研究院, 陕西 西安 710054;
2. 陕西高速公路工程试验检测有限公司, 陕西 西安 710086)

摘要: 针对河堤、水坝、高速公路挡水墙等存在多孔单元介质中的定常渗流问题, 将渗流 Laplace 方程, 通过数学变换转化为边界积分方程, 进而离散为线性代数方程组。采用边界元编写 FORTRAN 程序。计算结果表明: 该法与有限元法相比, 占用 CPU 时间短, 不需要网格化分, 使繁杂问题简单化, 同时很好地切近实际。

关键词: 渗流问题; 边界积分方程; 边界元法

中图分类号: P64 文献标识码: A

Analysis and solution to boundary element of seepage in engineering

SHEN Jun¹, ZHANG Jian²

(1. Xi'an Branch, China Coal Research Institute, Xi'an 710054, China; 2. Highway Test and Detecting Co. of Shaanxi Province, Xi'an 710086, China)

Abstract: Focused on stationary seepage in porous medium of river dike, dam and bulkhead of highway the Laplace equation for solving seepage problem is transferred to the boundary integral equation mathematically in this paper, and then it is dispersed to the linear equation group and worked out using the FORTRAN programmed by boundary element. The results show that the method boasts the superiority to the finite element by its shorter time use of CPU, without meshwork, solution simplification and closer to the practical situation.

Key words: seepage; boundary integral equation; boundary element method

河堤、水坝、土桥、高速公路挡水墙等, 均存在多孔单元介质中的定常渗流问题。这种渗流问题服从各向异性介质中的 Laplace 方程。过去用有限元法成功地求解了这类问题。然而有限元法存在如下缺点: 产生有限元网格需要繁重地人力及时间消耗; 耗用较长的 CPU 时间; 对繁杂问题, 单元的形态及形函数的选择需给予特别的注意。但是边界元使三维问题化为二维, 二维问题转化为一维问题。因而只需将问题的边界分元。本文从渗流的 Laplace 方程出发, 通过坐标变换化为通常的 Laplace 方程, 进而利用 Green 第二公式转化为边界积分方程, 采用通常的离散方法, 将此边界积分方程转化为线性代数方程组。求解此方程组, 得到完整的边界值。一个回代过程将给出域内点上压力势头函数的数值。例如, 水坝、挡墙、石油井经常需要确定自由渗流界面线, 利用叠代法可解决它。另外采用上述理论编写的边界元 FORTRAN 程序算得的数值解与解析解相吻合, 与实际问题有很好的逼近程度。

1 渗流问题的基本方程

推动水在介质中渗流的力为重力, 它的势函数为 $\rho g x_2$ 。由 Darcy 定理^[1] $v_i = k(i - i')$ (为书写方便采用张量写法):

$$v_i = K_{ij} \frac{\partial(\rho g x_2 + P)}{\partial x_j} \quad (i=1, 2, j=1, 2), \quad (1)$$

其中 v_i 为流体速度, K_{ij} 是二阶对称逆变张量, 为渗透系数张量。设 P 为静水压力, g 为重力加速度, ρ 为水的密度, x_2 为铅垂坐标, x_1 为水平坐标。

若定义压力势头函数:

$$\Phi = \rho g x_2 + P, \quad (2)$$

$$\text{则: } v_i = K_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = K_{ij} \varphi|_i, \quad (3)$$

水坝、挡土墙、石油井均属定常流动, 质量守恒(即满足散度定理):

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_i|_i, \quad (4)$$

收稿日期: 2007-08-05

作者简介: 沈军(1960—), 男, 江苏苏州人, 工程师, 主要从事岩土工程试验及检测工作。

$$\text{所以有: } K_{ij} \Phi|_{ij} = 0. \quad (5)$$

这就是渗流的 Laplace 方程。将坐标系转换到主坐标轴(x_1 , x_2)中(图 1), 渗透系数张量化为对角型: $[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{1'1'} & 0 \\ 0 & K_{2'2'} \end{bmatrix}$,

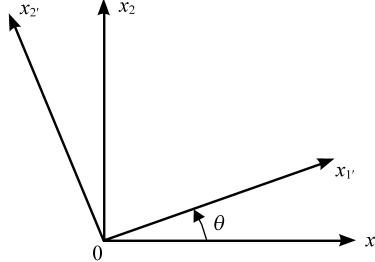


图 1 整体坐标轴(x_1 , x_2)和主坐标轴(x_1' , x_2')

Fig. 1 The axis (x_1 , x_2) for whole coordinate and the principle axis (x_1' , x_2')

于是(5)式变为:

$$K_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x_{1'})^2} + K_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x_{2'})^2} = 0, \quad (7)$$

其中 $K_1 = K_{1'1'}$, $K_2 = K_{2'2'}$ 是两个主方向的渗透系数。主坐标轴 x_1' 与整体坐标轴 x_1 之间的夹角为 θ 。

$$\text{且: } \tan \theta = \frac{2K_{12}}{K_{11} - K_{22}},$$

$$K_1 = \frac{K_{11} + K_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K_{11} - K_{22}}{2}\right)^2 + (K_{12})^2},$$

$$K_2 = \frac{K_{11} + K_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K_{11} - K_{22}}{2}\right)^2 + (K_{12})^2},$$

$$\text{令 } x_1 = x_{1''}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} x_{2''}, \quad (8)$$

$$\text{于是(7)式变为: } \nabla^2 \Phi(x_{1''}, x_{2''}) = 0. \quad (9)$$

(9)式就是渗流问题通常的 Laplace 方程。用边界积分方程求解。为求解此方程, 首先找出速度分量在坐标系(x_1 , x_2)、(x_1' , x_2')、($x_{1''}$, $x_{2''}$)之间转换关系(图 2)。由张量坐标变换规则得:

$$\left. \begin{aligned} v_{1'} &= v_{1''} \\ v_{2'} &= \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} v_{2''} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

在收缩坐标平面($x_{1''}$, $x_{2''}$)中, 边界的切线 S_{**} 与 $x_{1''}$ 轴夹角为 Ψ_{**} , 则速度的法向及切向分量 v_{n**} , v_{s**} 与在坐标轴($x_{1''}$, $x_{2''}$)中分量 $v_{1''}$, $v_{2''}$ 之间有关系

$$\left. \begin{aligned} v_{1''} &= v_{n**} \sin \Psi_{**} + v_{s**} \cos \Psi_{**} \\ v_{2''} &= -v_{n**} \cos \Psi_{**} + v_{s**} \sin \Psi_{**} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

同样在主坐标系(x_1' , x_2')中边界的切线 S_* 与

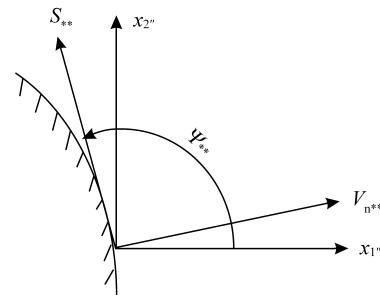


图 2 收缩坐标平面($x_{1''}$, $x_{2''}$)
Fig. 2 Constringency coordinate flat surface ($x_{1''}$, $x_{2''}$)

$x_{1''}$ 轴夹角为 Ψ_* , 则法向速度 v_{n*} 与速度在主坐标系中分量 $v_{1'}$ 及 $v_{2'}$ 有如下关系(图 3):

$$v_{n*} = v_n = v_{1'} \sin \Psi_* - v_{2'} \cos \Psi_*, \quad (12)$$

代式(11)入式(10), 式(10)入式(12), 得到:

$$\begin{aligned} v_n &= (\sin \Psi_* \sin \Psi_{**} + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \cos \Psi_* \cos \Psi_{**}) v_{n**} + \\ &\quad (\sin \Psi_* \cos \Psi_{**} - \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \cos \Psi_* \sin \Psi_{**}) v_{s**} \end{aligned}; \quad (13)$$

由 $\tan \Psi_* = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \tan \Psi_{**}$ 得:

$$v_n = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \left[\frac{1 + \tan^2 \Psi_{**}}{1 + \frac{K_2}{K_1} \tan \Psi_{**}} \right]^{1/2} v_{n**}. \quad (14)$$

这就是物理平面法向流速 v_n 与收缩坐标平面($x_{1''}$, $x_{2''}$)中 v_{n**} 间的转换关系(图 3)。

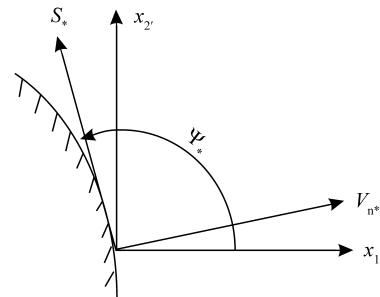


图 3 物理坐标平面($x_{1''}$, $x_{2''}$)
Fig. 3 Physical coordinate flat surface($x_{1''}$, $x_{2''}$)

在收缩坐标系($x_{1''}$, $x_{2''}$)中, 据 Darcy 定理, 得:

$$\begin{aligned} v_{n**} &= n_{i''} K_{i''j''} \Phi|_{j''} \\ &= n_{j''} K_{i''j''} \left(\frac{dx_{1''}}{dx_{i''}} \right)^2 \Phi|_{i''} + n_{2''} K_{2''2''} \left(\frac{dx_{2''}}{dx_{2''}} \right) \Phi|_{2''} \\ &= n_{i''} K_{i''1''} \Phi|_{1''} + n_{2''} \frac{K_1}{K_2} \Phi|_{2''} K_{2''2''} \\ &= K_{i''1''} (n_{1''} \Phi|_{1''} + n_{2''} \Phi|_{2''}) = K_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_{**}}, \end{aligned} \quad (15)$$

(14)式与(15)式相结合得^[2]:

$$v_{n**} = \left[K_1 K_2 \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \Psi_{**}}{1 + \frac{K_2}{K_1} \operatorname{tg}^2 \Psi_{**}} \right] \right]^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial n_{**}}, \quad (16)$$

这里 v_{n**} 是物理平面上的流速, Ψ_{**} 是收缩平面上边界与 x_1 轴的夹角, $\frac{\partial \Phi}{\partial n_{**}}$ 是沿收缩平面中边界的法向导数。

2 渗流问题的边界积分方程

Laplace 方程的基本解为^[3]:

$$\Phi''(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(P, Q)}, \quad (17)$$

其中 P 和 Q 为 (x_1, x_2) 平面上的任意两点, $r(p, q)$ 表示矢径 $r(p, q)$ 的模长。 $\Phi(P, Q)$ 满足:

$$\nabla^2 \Phi''(P, Q) = -\delta(P, Q), \quad (18)$$

并且函数 $\delta(P, Q)$ 具有如下性质:

$$\iint_{\Omega} \delta(P, Q) f(Q) dQ = \begin{cases} Q_0 \cup P \notin \Omega(Q) \\ f(P) \cup P \in \Omega(Q) \end{cases}, \quad (19)$$

其中 $f(P)$ 是任意函数。

将 Φ 及 Φ'' 代入 Green 第二公式得到:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_*} (\Phi \nabla^2 \Phi_* - \Phi_* \nabla^2 \Phi) d\Omega_* \\ &= \oint_{S_*} \left[\Phi \frac{\partial \Phi_*}{\partial n_{**}} - \Phi_* \frac{\partial \Phi}{\partial n_{**}} \right] dS_{**}, \end{aligned} \quad (20)$$

利用(9)式和(18)式, (19)式得到:

$$\Phi(P) = - \int_{S_*} [\Phi(Q) \frac{\partial \Phi(P, Q)}{\partial n_{**}(Q)} - \Phi_*(P, Q) \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n_{**}(Q)}] dS_{**}, \quad (21)$$

其中 P 是域 Ω_* 的内点, Q 是 Ω_* 边界上点, n_{**} 是边界 S_{**} 的外向法线, 当点 P 从域 Ω_* 内逼近边界 S_{**} 时, 有下列极限:

$$\begin{aligned} & \lim_{P \rightarrow P_{S_{**}}} \int_{S_{**}} \Phi(Q) \frac{\partial \Phi_*(P, Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q) \\ &= -\frac{1}{2} \Phi(P) + \oint_{S_{**}} \Phi(Q) \frac{\partial \Phi(P, Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q), \\ & \lim_{P \rightarrow P_{S_{**}}} \int_{S_{**}} \Phi_*(P, Q) \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q) \\ &= \int_{S_{**}} \Phi_*(P, Q) \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q), \end{aligned}$$

此时(21)式为^[4]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Phi(P) + \oint_{S_{**}} \Phi(Q) \frac{\partial \Phi_*(P, Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q) \\ &= \int_{S_{**}} \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n_{**}(Q)} \Phi_*(P, Q) dS_{**}(Q) \end{aligned} \quad (22)$$

这时 P 变为边界 S_{**} 上的光滑点, 并假定 P 点

附近 S_{**} 是光滑的, (22)式是关于压力势头函数 Φ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial n_{**}}$ 的边界积分方程, 对于水坝、挡土墙、排水渠等没有解析解, 因而必须求解该方程的数值解。

3 数值解与算例

以图 4 所示具有对称性的排水渠为研究对象, 假定其渗透系数张量 $K_1=K_2$ ($K_1 \neq K_2$ 仍然适用), 将其边界坐标由变换关系(8)映射到 (x_1, x_2) 平面上, 边界 S_{**} 分为 85 个边界元。见图 4 所示边界元划分。简单地用线段代替边界元段。采用常数元, 即假定在每个边界元上, $\Phi(Q)$ 及 $\frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n(Q)_{**}}$ 都等于其在元中点 Q_i 的值。于是边界积分方程(22)式可近似为以下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Phi(P_i) + \sum_{j=1}^{n=85} \Phi(Q_j) \oint_{S_{j**}} \frac{\partial \Phi(P_i, Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q) \\ &= \sum_{j=1}^{n=85} \frac{\partial \Phi(Q_j)}{\partial n_{**}(Q_j)} \int_{S_{j**}} \Phi(P_i, Q) dS_{**}(Q) \end{aligned}, \quad (23)$$

(在此以后求和算式用 Σ 表示, 目的是和前面所用张量的写法区分开)。

该问题的边界条件可以表述为: 在迎水面和背水面 Φ 已知, 坝底 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n = 0$, 即法向流速为零。将上述边界条件代入(23)式, 并将已知项移到右端, 得到含 $n=85$ 个未知量的线性代数方程组, 解之得其值。回代入 $\Phi(Q_i)$ 及 $\frac{\partial \Phi(Q_i)}{\partial n(Q_i)}$, 这样就得到所有边界上 Φ 及 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 。

这里值得注意是该问题的边界条件 Φ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 是在物理平面上所决定的。而边界积分方程(22)及其离散式(23)却是在收缩平面 (x_1, x_2) 上建立的, 因此必须用公式(16)进行转换, 将转换后的边值 $\Phi(Q_i)$ 及其 $\frac{\partial \Phi(Q_i)}{\partial n_{**}(Q_i)}$ 代入(21)式的离散形式, 并得到所求区域内任一点 P 的压力势头值。

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= - \sum_{j=1}^n \Phi(Q_i) \int_{S_{j**}} \frac{\partial \Phi(P, Q)}{\partial n_{**}(Q)} dS_{**}(Q) + \\ & \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi(Q_i)}{\partial n_{**}(Q_i)} \int_{S_{j**}} \Phi(P, Q) dS_{**}(Q) \end{aligned} \quad (24)$$

决定自由渗流水面曲线时, 其上静水压力 $P=0$, 因而压力势头函数 $\Phi=\rho gx$, 并且法向流速为零, 即 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}=0$, 但边界的坐标值 x_2 未知, 这可用迭代法解

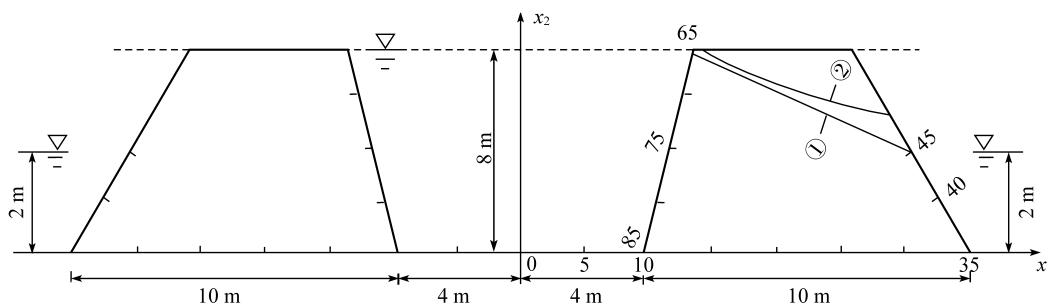


图 4 排水渠实体分元及自由渗流界面曲线横断面示意图
Fig. 4 The cross section of drainage dike and free seepage curve

之, 先假定其初始自由水面线形状, 即为 x_2 的初始值, 然后依上述初值来求解整个区域的解值 $\Phi = \rho g x_2$ 的一次近似值, 再以 x_2 一次近似值以同样方法求解二次近似值, 依次类推, 直到 Φ 的相邻两次近似值之差小于所允许的误差范围为止(可根据要求进行设定)。

若渗流介质不均匀, 可将求解区域分成若干个子区域, 使每一子区域内介质具有同一渗流系数张量。这样可以在每个子区域内建立边界积分方程, 利用子区域间的连续条件进行数值解。根据上述理论分析, 编写了 FORTRAN 程序, 并将排水渠的边界条件以及边界的分元信息输入程序, 计算得到自由水面线坐标和所求域内各点的压力势头值, 见表 1 和表 2。

由图 4 和表 2 可知:

a. 边界条件 1~10 分元, $\Phi = 8$; 11~35 分元,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0; \quad 36 \sim 40 \text{ 分元}, \quad \Phi = \rho g x_2; \quad 41 \sim 65 \text{ 分元},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0; \quad 66 \sim 85 \text{ 分元}, \quad \Phi = \rho g x_2.$$

b. 图 4 中直线①表示假设初始渗水线, 呈直线; 曲线②代表数值解中的自由渗流界面, 呈曲线。

c. 水坝域内点, 就是表 2 中求得的内部 Φ 数值点。

d. 数值解在表 2 中分 85 个元, 上水头高 8 m, 下水头高 2 m。

表 1 自由水面线坐标
Table 1 The coordinate of freedom water surface

x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
6.90	7.63	-6.90	7.63	9.60	6.24	-9.60	6.24
7.20	7.49	-7.20	7.49	9.90	6.05	-9.90	6.05
7.50	7.35	-7.50	7.35	10.20	5.85	-10.20	5.85
7.80	7.21	-7.80	7.21	10.50	5.65	-10.50	5.66
8.10	7.08	-8.10	7.08	10.80	5.42	-10.80	5.42
8.40	6.91	-8.40	6.91	11.10	5.17	-11.10	5.17
8.70	6.75	-8.70	6.75	11.40	4.87	-11.40	4.87
9.00	6.58	-9.00	6.58	11.70	4.53	-11.70	4.53
9.30	6.41	-9.30	6.41				

表 2 域内点压力势头值
Table 2 Water areas pressure head in the region

域内点坐标		势头值	域内点坐标		势头值
x_1	x_2		x_1	x_1	
6.0	1.0	7.2	-6.0	1.0	7.2
8.0	1.0	6.1	-8.0	1.0	6.1
10.0	1.0	4.8	-10.0	1.0	4.8
12.0	1.0	3.2	-12.0	1.0	3.2
8.0	2.0	6.2	-8.0	2.0	6.2
10.0	2.0	4.9	-10.0	2.0	4.9
8.0	3.0	6.3	-8.0	3.0	6.3
10.0	3.0	5.1	-10.0	3.0	5.1
8.0	4.0	6.5	-8.0	4.0	6.5
9.0	4.0	5.9	-9.0	4.0	5.9
8.0	5.0	6.7	-8.0	5.0	6.7
9.0	5.0	6.2	-9.0	5.0	6.2
8.0	6.0	6.9	-8.0	6.0	6.9

4 结语

将表中数值解和边界条件比较, 可以看出其逼近程度相当好, 且对称性良好, 充分体现该程序的有效性。另外对简单的轴对称问题作了试算, 得到的数值解与解析值相吻合。再将自由水面曲线和土力学的渗流问题定性分析相比较, 显示出计算方法准确性和合理性, 以及理论分析的正确性和完整性, 说明边界元法对渗流问题优先于有限元法。

参考文献

- [1] Darcy H. Les fontaines publiques, de la ville de Paris, dans le département [M]. Paris: Victor Dalment, 1856.
- [2] 吉洪若夫 A H, 隆马尔斯基 A A. 数学物理方程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1961.
- [3] BREBBIA C A. The boundary element method for engineers, pentech [M]. London: Pentech Press, 1978.
- [4] 甄继庆. 固体力学中的边界元积分方程法[M]. 甘肃: 兰州大学出版社, 1985.