

文章编号: 1001-1986(2004)03-0058-04

波场变换方程的数值计算

华军, 蒋延生, 汪文秉 (西安交通大学电信学院, 陕西西安 710049)

摘要: 对瞬变电磁法(TEM)测量数据作波场变换, 可以实现TEM数据的拟地震成像解释, 其中, 虚拟波动场波形展宽现象是阻碍这一应用的关键问题。本文采用Tikhonov正则化算法和选取正则因子的L准则, 对具有解析结果的波场变换方程进行了数值求解。数值计算表明, 由于数值计算引入的展宽是虚拟波动场波形展宽的主要因素, 因此, 减小数值求解波场变换方程时所引入的波形展宽, 应当是波场变换方程应用研究的重要问题之一。

关键词: 瞬变电磁测深; 波场变换方程; Tikhonov正则化; L准则

中图分类号: P631.3 文献标识码: A

1 引言

波场变换技术有可能实现低频测量数据的偏移成像解释。文献[1]应用这一变换, 实现了单层结构低频电磁场井间层析成像。我国学者陈本池利用TEM模拟数据, 在文献[2]中也获得了单一界面的2D地质结构图像。

从文献[1]和[2]中可以看出, 基于波场变换的TEM拟地震成像的分辨率不高, 未能实现复杂结构的成像, 直观上表现为, 虚拟的波动场数据波形随着偏移距增大存在着明显的展宽效应。

文献[3]从模型分析的角度, 讨论了虚拟波动场数据波形展宽的物理原因, 指出在无耗媒质中, 大回线圈产生的时域电磁场波形本身就随偏移距和地层电导率的增大而展宽。

本文采用Tikhonov正则化算法和选取正则参数的L准则, 对一个已知的解析变换对进行了计算, 探讨数值计算对虚拟波动场展宽效应的影响。

2 波场变换方程的数值求解

多偏移距时的波场变换方程可写为^[1]:

$$f(\rho, t) 2\sqrt{\pi t^3} = \int_0^\infty K(t, q) U(\rho, q) dq, \quad (1)$$

$$K(t, q) = q \exp[-q^2/(4t)], \quad (2)$$

式中 $f(\rho, t)$ 为偏移距 ρ 处的满足扩散场方程的标量电(磁)场分量; $U(\rho, q)$ 为同一位置处虚拟波动场相应分量; q 为虚拟时间变量; $K(t, q)$ 为波场变换的核函数, 其形式可认为是以 q 为权函数的高斯

分布函数(以真实的物理时间 t 为方差)。

波场变换方程(1)是第一类的Fredholm积分方程, 是一个病态问题, 在求解过程中需要使用正则化技术。

求解第一类积分方程最常用的方法是Tikhonov正则化方法。本文采用该方法求解波场变换方程, 正则化参数的选择采用L准则求取。

2.1 离散方法的选择

采用数值法求解波场变换方程, 首先需要应用矩量法对其进行离散化。对积分的离散, 本文采用文献[1]中的方法, 即采用数值积分法中的梯形积分公式对积分方程进行离散。

对扩散场数据的离散, 需要考虑TEM测量数据的特点。TEM测量数据类似于指数衰减曲线, 信号延续时间较长, 并且后期的变化较平缓。因此, 本文对扩散场数据采用对数等间隔离散。即若设时间窗 $t \in [10^{d1}, 10^{d2}]$, 离散点数设为 N , 则时间域采样时刻可选为: $\log_{10}(t_i) = i(d2 - d1)/N$ 。

2.2 Tikhonov正则化算法

设波场变换方程离散化后的矩阵方程为:

$$Ax = b, A \in R^{m \times n}, m \geq n. \quad (3)$$

矩阵 A 是病态矩阵, 其奇异值逐渐衰减至数值零, 因此, 它条件数非常大。

Tikhonov型正则化方法把(3)式的求解归结为如下形式最小化的问题:

$$x_\lambda = \min \{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|Lx\|_2^2 \}, \quad (4)$$

式中 x_λ 为方程(3)的正则解, 算子 L 一般为0...2阶的差商算子, 参数 λ 称为正则参数(正则因子)。

上式最小化的第一项是最小二乘问题, 它可使方程的解与原物理问题的要求相符。最小化的第二项是为了克服问题的病态, 即在光滑函数空间中寻求近似解, 从而使正则解在真解的附近连续地依赖于数据, 达到正则化的目的。

方程(4)等价于求解如下方程:

$$(A^T A + \lambda L^T L) x_\lambda = A^T b. \quad (5)$$

对矩阵束 (A, L) 作广义奇异值分解(GSVD)^[9], 则(5)式的解 x_λ 可写为^[6]:

$$x_\lambda = X \begin{bmatrix} F_\lambda & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} \Sigma U^T b, \quad (6)$$

其中 矩阵 F_λ 为 $P \times P$ 阶的对角阵, 其对角元为:

$$f_{ii} = \gamma_i^2 / (\gamma_i^2 + \lambda). \quad (7)$$

2.3 L准则及正则参数的确定

(6)式中的正则参数 λ 的选取决定了 Tikhonov 正则解的“优劣”, 它在(4)中的两个约束之间起协调和折衷的作用。分析表明, 如果选的过大, 则正则解就会过于光滑而丢失了过多的物理信息, 相反, 则会引入虚假的物理信息。

L准则是一种简单直观的图示化选择方法^[15-16]。设当 $\lambda \in [0, \infty)$ 时, (4)式中的数据拟合残差和约束分别记为 $\rho_\lambda = \|Ax_\lambda - b\|_2$ 和 $\eta_\lambda = \|Lx_\lambda\|_2$ 。如果绘制参数图 $(\log \rho_\lambda, \log \eta_\lambda)$, 那么它通常都呈现为“L”形曲线, 有着明显的水平分支和竖直分支, 两条分支的转换处存在明显的“角点”, 如图1所示。

L曲线左右分支的意义和形成, 可以通过对正则化解 x_λ 的误差分析得到。文献[7]和[8]的研究指出, 曲线的右侧水平分支的出现, 是由于随着正则化参数的增大, 正则化解 x_λ 中由于正则参数选择过大所引入的正则化误差逐渐增大, 并成为占主导地位的主要误差源, 造成数据拟合误差 ρ_λ 对正则参数的变化非常敏感而约束 η_λ 几乎不变; 而 L形曲线左侧的竖直分支的出现, 则是由于扰动误差成为主要误差来源。因此, “角点”即为最优的正则化因子。

最优正则因子的选择求取算法采用文献[7]的算法, 即在尽可能宽的 λ 取值范围内, 选取若干个离散点, 求取相应的正则解及 ρ_λ 和 η_λ 。对形成的 $(\rho_\lambda, \eta_\lambda)$ 点对作3次样条曲线拟合, 形成对连续型L曲线的逼近。“角点”的判决依据则采用“最大曲率”准则, 即对形成的3次样条拟合曲线作微分运算, 其最大曲率处即是L形曲线的“角点”。

3 波场变换方程的数值算例和计算结果

本节通过对波场变换方程已知解析对的数值求

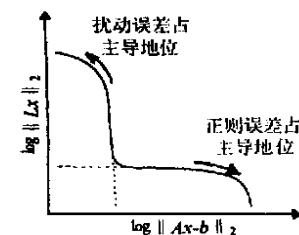


图1 “L”形曲线

解, 考察 Tikhonov 正则化算法与 L 准则选取的正则参数方法的有效性。由于已知解析结果, 我们就可以考察数值算法对虚拟波动场波形展宽效应的影响。

载有单位阶跃电流 $U(t)$ 的无限长线电流激励均匀导电全空间, 若忽略位移电流, 则电场满足扩散方程, 其解为:

$$E_y(\rho, t) = \frac{\mu_0}{4\pi t} \exp\left(-\frac{q_0^2}{4t}\right), \quad (8)$$

相应地, 虚拟波动场满足波动方程, 其解为:

$$U(\rho, q) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{U(q - q_0)}{\sqrt{q^2 - q_0^2}}. \quad (9)$$

上两式中, $q_0 = \rho \sqrt{\mu_0 \sigma}$ 为虚拟波动场波达时刻, 易知两者满足波场变换方程式(1)。

虚拟波动场解(9)式随偏移距和电导率的增大而展宽。可分析如下:

定义虚拟波动场幅度下降到 β (如 0.01) 的时刻为 q_β , 波形宽度 Δ 则为:

$$\Delta = q_\beta - q_0 = \sqrt{q_0^2 + [\mu_0 / (2\pi\beta)]^2} \\ \frac{d\Delta_\beta}{dq_0} = \frac{q_0}{\sqrt{q_0^2 + [\mu_0 / (2\pi\beta)]^2}} \approx 1 > 0. \quad (10)$$

由(10)式可知, 随着 q_0 (即偏移距和电导率) 的增大, 波形宽度缓慢增大。在以下的数值计算中, 全空间电导率选为 $\sigma = 1 \text{ S/m}$, (4)式中的算子 L 取为零阶差分算子 (即单位对角阵, 本质上, 我们所选用的解集约束为连续函数空间)。

在扩散场数据不加噪声的情况下, 不同偏移距处, 虚拟波动场数值计算结果与解析结果对比如图2所示(图中虚线为解析结果)。为方便不同道数据波形的对比, 图中各道波形相对于本道数据最大值作归一化。

从图2中可以看到, 随着偏移距的增大, 数值计算波形逐渐展宽。其中, 偏移距为 75 m 和 225 m 的两道波形的非归一化对比图, 分别示于图3和图4。

从图3和图4中还可看出, Tikhonov 正则化和 L 准则求取正则因子的算法是有效的。而且, 小偏移时, 数值结果与解析结果吻合程度要优于大偏移

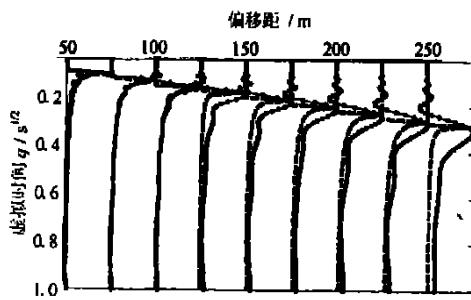


图 2 虚拟波动场波形堆积图(归一化)

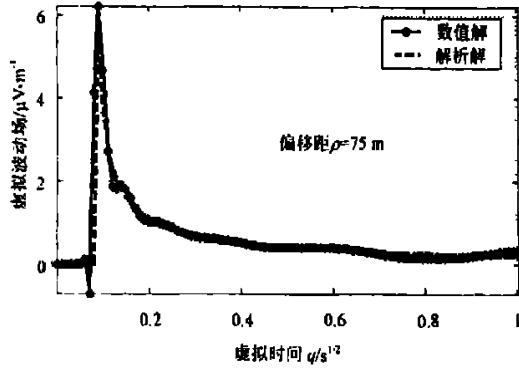
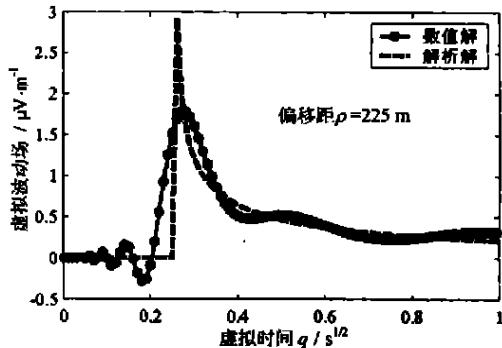
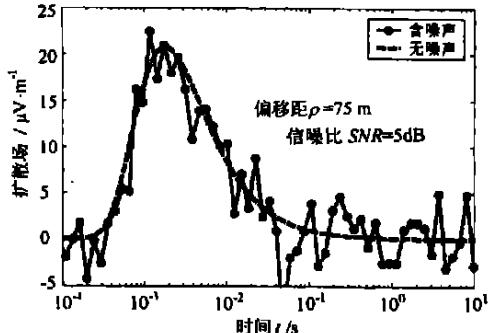
图 3 偏移距 $\rho = 75$ m 处虚拟波动场图 4 偏移距 $\rho = 75$ m 处虚拟波动场

图 5 扩散场数据加噪对比

距时的结果(两者都有小幅度的虚假信号)。

大偏移距时, 数值结果劣于小偏移距, 其原因在于波场变换方程核函数的特点, 即高斯分布形式的核函数以真实的物理时间为方差。因此, 偏移距越大, 扩散场波形出现和结束的时刻愈加滞后, 此时,

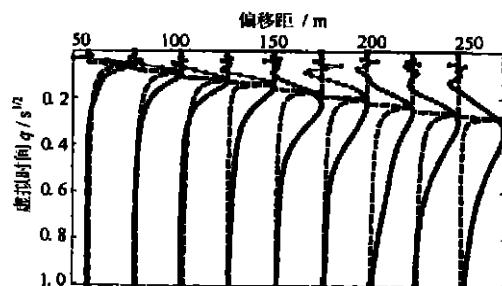
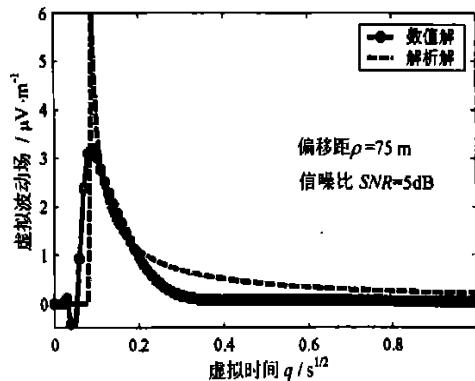


图 6 加噪后虚拟波动场波形堆积图(归一化)

注: 信噪比 $SNR = 5$ dB

图 7 加噪后偏移距 $\rho = 75$ m 处虚拟波动场

核函数波形也相应地比小偏移距时的宽阔, 病态性也越强。因此, 大偏移距时的数值计算结果往往也就劣于小偏移距。(由于地层电导率增大时, 扩散场波形也会滞后, 因此, 也存在有随地层电导率的增大, 数值结果的波形展宽效应越明显的现象。限于篇幅, 本文不再给出计算结果)。

当扩散场数据叠加有信噪比 $SNR = 5$ dB 的零均值的高斯噪声时, 偏移距 $\rho = 75$ m 处的扩散场数据如图 5 所示。相应地, 虚拟波动场波形堆积图如图 6 所示。偏移距 $\rho = 75$ m 和 225 m 处的虚拟波动场计算结果分别示于图 7 和图 8。

由图 6 至图 8, 扩散场数据加噪后计算得到的虚拟波动场明显地变宽, 甚至在小偏移距处也是如此, 而大偏移距处的虚拟波动场, 由于数值计算引入的波形展宽现象更加明显。另外, 加噪后计算得到的虚拟波动场波形的峰值也比不加噪时降低了。这些现象必然要严重影响波场变换方法的实际应用。

4 结论

本文采用 Tikhonov 正则化及 L 曲线选取正则因子的方法求解波场变换方程。计算表明, 由于数值计算引入的虚拟波动场波形展宽, 是影响波场变换实际应用的主要因素, 而且波形展宽效应随着偏移距和地层电导率的增大而更加显著。因此, 探讨能够

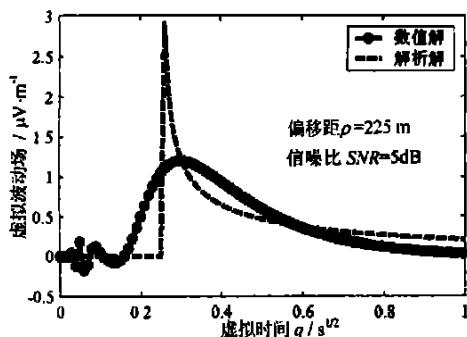


图8 加噪后偏移距 $\rho=225$ m 处虚拟波动场
减小数值计算引入的波形展宽效应的数值算法, 是
波场变换方程应用研究的重要问题。

参考文献

- [1] Lee K H, Xie G. A New approach to imaging with low frequency electromagnetic fields[J]. Geophysics, 1993, 58(6): 780—796.
- [2] 陈本池. 瞬变电磁场的波场变换与偏移成像理论研究[D]. 中国地质大学(北京)博士论文, 1998.
- [3] 华军, 蒋延生, 汪文秉. 瞬变电磁测深波场变换中波形展宽原因探讨[J]. 煤田地质与勘探, 2003, 31(3): 52—56.
- [4] Harrington R F. Field Computation by Moment Methods. New York, MacMillan, 1968.
- [5] Tikhonov A N. Solutions of ill-posed problems, New York, 1977.
- [6] Hansen P C. Regularization, GSVD and Truncated GSVD[J]. BIT, 1989, 29: 491—504.
- [7] Hansen P C, Leary D P, O' . The Use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems[J]. SIAM, Journal on scientific computing, 1993, 14(11): 1487—1503.
- [8] Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve[J]. SIAM Review, 1992, 34(4): 561—580.

Numerical calculation of the wavefield transformation

HUA Jun, JIANG Yan-sheng, WANG Wen-bing

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: By the wavefield transformation, which can transform the diffusive electromagnetic fields to wavefields defined in a time-like variable mathematically, if the corresponding wavefields can be accurately computed from the transient electromagnetic (TEM) sounding data, one would be able to interpret these TEM data using techniques developed for the wavefields such as the seismic migration imaging. In this paper, the Tikhonov regularization method and the L-curve criterion for determining the regularization factor has been adopted to solve an analytical wavefield transformation pair. From our numerical results, we find that, although above method can give us some regularized results correctly, but it also can severely introduce waveform broadening phenomena "numerically" with increasing the observer offset and the conductivity of earth that will severely reduce the imaging resolution in engineering. So, developing a numerical method that can reduce the transformed waveform broadening phenomena is the key issue to apply the wavefield transformation in addition to migration imaging technique interpreting the TEM sounding data.

Key words: TEM; Wavefield transformation; Tikhonov regularization; L-curve criterion

《沙漠地区煤厚解释方法研究》成果 获陕西省科学技术奖

2001—2002 年度陕西省科学技术奖励项目日前公布, 陕西省煤田地质局完成的《沙漠地区煤厚解释方法研究》获得陕西省科学技术奖三等奖。

“沙漠地区煤厚解释方法研究”项目于 1996 年立项, 1999 年通过专家评审, 之后进行推广应用。该项目在基础理论研究方面, 特别是在地震反射波特征参数与煤厚变化关系方面的研究比较深入, 编制出相应的正反演软件, 设计合理, 程序功能齐全, 使用方便。经在 6 个地震勘探项目中使用, 认为煤厚解释精度较高, 适用范围广。以往地震勘探主要用来探测构造, 但是煤矿建设还需要地震勘探能够确定煤层厚度及其变化, 该课题成果迎合了煤矿建设的需要, 可为矿井设计和综采生产提供必需的地质资料, 全国需要新建和延拓的煤矿有上百个, 采用该项成果可测出仅靠钻探不能测出的钻孔之间的煤层厚度, 因而具有很大的社会效益及明显的经济效益。

研究成果在陕北侏罗纪多个地震勘探项目中得到了广泛应用, 在榆神矿区先期开发区详查地震勘探中, 利用本方法对地震测线上的煤厚做了定量解释, 并勾绘了 2^2 煤层等厚图, 其煤层厚度采集点密度为每 5 m 一个点(而钻探为 1 500 m 一个点, 可见精度大为提高), 且在国内首次利用地震解释的煤层厚度参与资源量的计算, 地震解释煤层厚度经与钻孔揭露值相比较, 最大相对误差为 6.08%, 最大绝对误差为 0.50 m, 绝对误差小于 0.3 m 的有 6 个孔, 占 55%, 均方差为 0.32 m。据此认为本次研究的煤厚反演方法精度可靠; 在榆神矿区大保当井田精查地震勘探中, 利用本方法对 2^2 煤层进行了定厚解释, 经地质钻孔验证, 最大绝对误差 0.42 m, 绝对误差小于 0.35 m 的占 80%, 相对误差一般小于 1%; 在榆神矿区锦界井田精查地震勘探中利用本方法对 4 层煤层进行了定厚解释, 经地质钻孔验证, 煤厚解释绝对误差最大为 0.27 m, 最小为 0.15 m。

(陕西省煤田地质局 范立民)