

文章编号: 1001-1986(2006)01-0070-04

# 体积分方程法模拟复电阻率三维体电磁响应

张 辉<sup>1</sup>, 李桐林<sup>1</sup>, 董瑞霞<sup>2</sup>

(1. 吉林大学地球探测科学与技术学院, 吉林 长春 130026;

2. 中油集团东方地球物理公司研究院乌鲁木齐分院, 新疆 乌鲁木齐 830016)

**摘要:** 利用体积分方程法计算了均匀半空间中复电阻率(激电)效应和电磁效应同时存在时的三维体响应。在计算中, 对于需要计算三重积分的张量格林函数电荷项一次部分, 应用一种差分近似的方法求解, 这种方法在保证计算精度的同时更加便于计算机实现; 采用二次剖分的算法解决了计算张量格林函数时的奇异值问题; 计算含有贝塞尔函数的积分项时, 利用一种结合连分式展开的高斯求积代替常规的快速汉克尔变换方法。验证了计算结果并分析了三维体复电阻率模型(Cole—Cole)参数对正演结果的影响, 为三维体复电阻率及其参数反演提供了正演依据。

**关键词:** 体积分方程法; 三维; 复电阻率; 电磁响应; 张量格林函数

**中图分类号:** P631.325 **文献标识码:** A

## Modeling electromagnetic responses of complex resistivity 3-D body using volume integral equation method

ZHANG Hui<sup>1</sup>, LI Tong-lin<sup>1</sup>, DONG Rui-xia<sup>2</sup>

(1. College of Geo-Exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China;

2. Urumqi Branch of GRI, BGP, Urumqi 830016, China)

**Abstract:** Using volume integral equation method to calculate 3-D body concurrent responses of induced polarization and electromagnetic in homogeneous half-space. The calculation of tensor Green's functions is discussed. We adopted difference approximate method for the charge primary part of tensor Green's functions. This method not only can ensure the calculation accuracy but is more convenient for computation as well. Secondly, using the algorithm of secondary division solved singular problem in calculation of tensor Green's functions. Using the Gaussian quadrature and continued fraction calculates the integral with Bessel function. The modeling results are compared with foreign works, all results prove that the procedure is correct. And results are analyzed in different parameter of complex resistivity.

**Key words:** volume integral equation method; three-dimension; complex resistivity; EM responses; tensor Green's function

## 1 引言

在频谱激电(复电阻率)法的野外观测资料中, 总包含有不同程度的电磁耦合效应<sup>[1,2]</sup>, 因此, 研究同时存在复电阻率(激电)效应和电磁效应时, 三维异常体响应具有重要的意义。

模拟有限大小三维体电磁响应时, 体积分方程法较为有效。其主要是通过引入张量格林函数, 将Maxwell方程组转化为矩阵方程并求解得到异常体内电场分布, 再利用相应的张量格林函数, 对异常体

内电场进行数值积分, 即可求得空间内任一点的电磁场值<sup>[3~5]</sup>。

在此, 引入三维体复电阻率(Cole—Cole)模型表示三维异常体剖分后的各均匀小单元复电阻率, 利用体积分方程法, 计算电偶源激发时均匀导电半空间中激电和电磁效应并存的三维体响应。求解过程中, 用球体等效立方体近似解析求得张量格林函数电流源项首次部分; 用面积和体积近似方法计算电荷源项和电流源项二次部分<sup>[3]</sup>; 而对于需要计算三重积分的张量格林函数电荷项一次部分, 应用一种

收稿日期: 2005-05-09

基金项目: 国土资源部重点科技项目(20010212)

作者简介: 张 辉(1980—), 男, 青海湟中县人, 在读博士研究生, 地球探测与信息技术专业。

[2] 纪万斌, 等. 塌陷与灾害[M]. 北京: 地震出版社, 1996.

[3] 李焕春, 张有朝, 王士平. 高密度高分辨电阻率法在采空区“三带”的探测研究[J]. 河北煤炭, 1999, (2): 38—40

[4] 郭恩惠, 刘玉忠, 赵 炯, 等. 综合物探探测煤矿采空塌陷区[J]. 煤田地质与勘探, 1997, 25(5): 8—11.

[5] 刘武皓, 文学宽. 地球物理勘探在探测煤矿采空区覆岩“两带”

中的应用[J]. 北京地质, 1999, (1): 18—24.

[6] 路军臣, 苏维涛, 张济怀. 瞬变电磁法在探测小窑采空区中的应用[J]. 河北煤炭, 2002, (2): 39—61

[7] 郭崇光, 田卫东. 瞬变电磁法在山西采空区探测中的应用[J]. 煤, 2004, 13(1): 25—26.

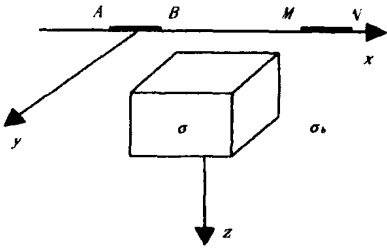


图 1 电偶极子源激发均匀大地中三维极化体模型

Fig.1 Model of 3D polarized body in homogeneous earth stimulated by electric doublet

差分近似的方法<sup>[6]</sup>求解。这种方法在保证计算精度的同时更加便于计算机实现。采用二次剖分算法可解决计算张量格林函数时的奇异值问题;另外,在计算含有贝塞尔函数的积分项时,利用结合连分式展开的高斯求积<sup>[7~9]</sup>代替常规的快速汉克尔变换<sup>[10,11]</sup>,在确保正确计算的同时可提高计算精度。

## 2 积分方程和矩阵方程的转化

如图 1 所示,设均匀大地中存在三维异常体, $\sigma_b$ 、 $\sigma$ 为大地和异常体复电导率, $AB$ 、 $MN$ 分别为水平电偶源发射和接收偶极,取时间因子为 $e^{i\omega t}$ ,则根据 Maxwell 方程、积分方程理论以及相应的电磁张量格林函数,可以得到均匀大地中复电阻率三维异常体电磁响应的积分方程<sup>[3,4]</sup>为:

$$F(r) = F_i(r) + \int_V \Delta\sigma \cdot \tilde{G}^f(r; r') \cdot E(r') dv', \quad (1)$$

式中  $F(r)$  是  $r$  处的总电场  $E(r)$  (或总磁场  $H(r)$ );  $F_i$  是水平电偶极子在大地上产生的一次电场 (或磁场);  $\tilde{G}^f$  为电  $\tilde{G}^E(r; r')$  (或磁  $\tilde{G}^H(r; r')$ ) 张量格林函数;  $E(r')$  为异常体内电场。

为便于数值计算,将大地中三维异常体剖分成  $n$  个线性尺寸为  $\Delta$  的立方体单元,并假设在每个单元内部电场是常数,且都等于其中心点处的电场,则各剖分单元内电场可用有限求和近似:

$$E(r_m) = E_i(r_m) + \sum_{n=1}^N \Delta\sigma_n \left( \int_{V_n} \tilde{G}^E(r_m, r') dv' \right) \cdot E(r_n). \quad (2)$$

整理上式得,

$$\sum_{n=1}^N [(\sigma_m - \sigma_b) \Gamma_{mn}^E - \delta_{mn}] \cdot E(r_n) = -E_i(r_m), \quad (3)$$

$$\text{式中 } \Gamma_{mn}^E = \int_{V_n} \tilde{G}^E(r_m, r') dv', \quad \delta_{mn} = \begin{cases} I & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases};$$

$I$  和  $0$  分别是  $3 \times 3$  的单位张量和零张量。

写(3)式为矩阵方程则有:

$$[M] \cdot [E] = [-E_i]. \quad (4)$$

解方程(4)求得异常体内各单元总电场  $E(r_n)$  后,再

利用(1)式即可得到空间内任意一点电磁场值。对于(4)式,计算时采用复系数方程组的高斯—约当消去法<sup>[12]</sup>求解。这种方法是高斯消去法的一个变种与改进,其优点是不用换行、换列,不用回代,而且具有较高的计算精度。

## 3 计算张量格林函数

利用体积分方程计算三维电磁响应时,如何准确快速地计算(3)式中的张量格林函数积分值,是求解过程中的关键问题。

如先不考虑界面影响,在全空间中第  $n$  单元对  $m$  单元中心处的电场为:

$$E_s^{mn} = -i\omega\mu_b A_s^{mn} - \nabla \cdot V_s^{mn}, \quad (5)$$

式中  $A_s$  和  $V_s$  分别是洛伦兹条件下的二次矢量位和二次标量位:

$$A_s^{mn}(r) = \int_V J_s(r') G(r, r') dv'; \quad (6)$$

$$V_s^{mn}(r) = \frac{-1}{\sigma_b} \int_V \nabla \cdot J_s(r') G(r, r') dv'. \quad (7)$$

其中  $G(r, r') = \frac{e^{-ik_b|r-r'|}}{4\pi\sigma_b|r-r'|} \times I$ ;  $I$  是  $3 \times 3$  的单位张量。

(5)式中右端第一项为电流源项,第二项为电荷源项,因此(3)式中  $\Gamma_{mn}^E$  可写成分别代表电流源和电荷源的两个分量之和:

$$E_s^n = (\Gamma_{mn}^{EPA} + \Gamma_{mn}^{EPV}) J_s^n. \quad (8)$$

其中  $J_s^n$  为单元  $n$  内的散射电流。

考虑地—空界面影响,  $\Gamma_{mn}^E$  中又可分为全空间项(首次项)和界面项(二次项), (8)式变为:

$$E_s^n = (\Gamma_{mn}^{EPA} + \Gamma_{mn}^{EPV} + \Gamma_{mn}^{ESA} + \Gamma_{mn}^{ESV}) J_s^n, \quad (9)$$

式中  $E_s^n$  为单元  $n$  中散射电流在单元  $m$  中的中心产生的二次电场;  $\Gamma_{mn}^{EPA}$ 、 $\Gamma_{mn}^{EPV}$ 、 $\Gamma_{mn}^{ESA}$ 、 $\Gamma_{mn}^{ESV}$  分别为张量格林函数积分的首次电流、电荷和二次电流、电荷项。

为求解(8)式中张量格林函数积分,用差分近似代替(5)式中标量位导数,并认为,原来假设都聚集在单元之间的边界上的电荷,均匀分布在两个相邻单元中心之间的一个体积内。从(7)式中标量位可算出电荷对电场的贡献。在单元  $n$  和  $n+1$  之间电流(以  $x$  方向为例)突变点处的导数近似为:

$$\frac{\partial J_{sx}}{\partial x} \approx \frac{J_{sx}^{n+1} - J_{sx}^n}{\Delta}. \quad (10)$$

假设在单元  $n$  左端的电荷均匀分布在以  $r_n - \frac{\Delta}{2} u_x$  ( $u_x$  表示  $x$  方向)为中心的立方体  $n^-$  中,类似地,单

元  $n$  另一端的电荷则均匀分布在以  $r_n + \frac{\Delta}{2} u_x$  为中心的立方体  $n^+$  中。由(7)可得到由散射电流  $J_{sx}^n$  在  $m$  单元  $x$  方向两端点处产生的标量位  $V_{xx}^{mn+}$  和  $V_{xx}^{mn-}$  :

$$V_{xx}^{mn+} = \frac{J_{sx}^n}{\sigma_b} \left[ - \int_{n^-} G(r_m + \frac{\Delta}{2} u_x, r') dv' + \int_{n^+} G(r_m + \frac{\Delta}{2} u_x, r') dv' \right]; \quad (11)$$

$$V_{xx}^{mn-} = \frac{J_{sx}^n}{\sigma_b} \left[ - \int_{n^-} G(r_m - \frac{\Delta}{2} u_x, r') dv' + \int_{n^+} G(r_m - \frac{\Delta}{2} u_x, r') dv' \right]. \quad (12)$$

其中  $n^+$  积分中  $r' = r_n + \frac{\Delta}{2} u_x$ ,

$n^-$  积分中  $r' = r_n - \frac{\Delta}{2} u_x$ 。

这样, (5)式变为:

$$E_{xss}^{mn} = -i\omega\mu_b A_{xs}^{mn} - (V_{xx}^{mn+} - V_{xx}^{mn-}) / \Delta. \quad (13)$$

利用(13)式可推得电荷源张量格林函数首次积分项为:

$$(\Gamma_{mn}^{EPV})_{xx} = (V_{xx}^{mn+} - V_{xx}^{mn-}) / (\Delta \cdot J_{sx}^n). \quad (14)$$

差分近似微商得到的精度与高阶基函数的精度不相上下, 但它更易于用计算机处理。

对于电流源张量格林函数首次积分项, 可用相同体积的球体代替立方体, 分别从场点在球体  $n$  内部和在球体外部考虑, 并用近似解析方法求解<sup>[3]</sup>。

考虑到地—空界面的影响, 对于电流源张量格林函数积分项二次部分采用近似体积分:

$$\Gamma_{mn}^{ESA} = -i\omega\mu_b \Delta^3 G^S(r_m, r_n). \quad (15)$$

由文献[3]知:

$$G^S = \gamma_1 \hat{x}\hat{x} + \gamma_1 \hat{y}\hat{y} - \frac{e^{-ik_b R_s}}{4\pi R_s} \hat{z}\hat{z}; \quad (16)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left( \frac{u-\lambda}{u+\lambda} \right) \frac{\lambda}{u} e^{-u(z+z')} J_0(\lambda r) d\lambda; \quad (17)$$

$$R_s = [(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2 + (z_m + z')^2]^{1/2};$$

$$\lambda = \sqrt{k_x^2 + k_y^2};$$

$$u = \sqrt{\lambda^2 - k_b^2};$$

$k_x, k_y$  为大地中  $x, y$  方向波数。

而电荷源项二次部分, 可近似为立方体表面电荷对场点响应的叠加, 则有:

$$\Gamma_{mn}^{ESV} = \sum_{l=1}^2 (-1)^l \frac{1}{\sigma_b} \Delta^2 G^{SV}(r_m, r'). \quad (18)$$

其中(文献[3]),

$$G^{SV} = \begin{bmatrix} (x_m - x') \gamma_2 \hat{x}\hat{x} + (x_m - x') \gamma_2 \hat{x}\hat{y} + (x_m - x') \gamma_3 \hat{x}\hat{z} \\ + (y - y') \gamma_2 \hat{y}\hat{x} + (y - y') \gamma_2 \hat{y}\hat{y} + (y - y') \gamma_3 \hat{y}\hat{z} \\ + (z_m - z') \gamma_3 \hat{z}\hat{x} + (z_m - z') \gamma_3 \hat{z}\hat{y} + (z_m - z') \gamma_3 \hat{z}\hat{z} \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4\pi r} \int_0^\infty \left( 2 - \frac{\lambda}{u} \right) e^{-u(z+z')} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda; \quad (20)$$

$$\gamma_3 = (ikR_s + 1) \frac{e^{-ik_b R_s}}{4\pi R_s}; \quad (21)$$

$$r' = r_n + (-1)^l \frac{\Delta}{2} u_{x,y,z}.$$

计算中对于含有贝塞尔函数的积分项, 采用结合连分式展开的高斯积分求解, 保证了计算的准确性, 而且提高了计算精度<sup>[9]</sup>。

另外, 在求解  $\Gamma_{mn}^{ESA}$  时, 在  $r_m = r_n$  处会出现奇异值问题。采用二次剖分的方法可解决这个问题: 分别对剖分后的异常体各单元再次剖分为  $n_c$  个次单元, 叠加各次单元对  $m$  单元中心处的响应, 即得到  $n$  单元对  $m$  单元中心点处的响应  $\Gamma_{mn}^{ESA}$ 。

#### 4 散射电场计算结果验证

为了验证该算法对于散射场计算的正确性, 我们选择了与文献[4]中相同的条件进行数值模拟。设在电阻率为  $200 \Omega \cdot m$  的均匀导电半空间, 有一个  $40 \text{ km} \times 5 \text{ km} \times 1 \text{ km}$  的低阻长方体, 电阻率为  $5 \Omega \cdot m$ , 在频率为  $1 \text{ Hz}$  的平面波激发下, 对其散射场进行模拟。图 2 是利用该算法, 并将异常体分别剖分为 200 和 1 600 个小立方体单元后, 计算得到的  $y$  轴方向地面各点的散射电场  $x, y$  分量。此结果与文献[4]的结果一致, 表明该算法是正确的。

#### 5 Cole—Cole 模型的引入

1978 年, Pelton 等<sup>[13]</sup>对大量岩矿石标本和露头的测量结果进行分析后, 首先用描述介电极化的 Cole—Cole 数学模型表示激电效应中均匀岩、矿石的复电阻率频谱, 这里 Cole—Cole 模型表达式为:

$$\rho(i\omega) = \rho_0 \left\{ 1 - m \left[ 1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \right] \right\}. \quad (22)$$

其中,  $\rho(i\omega)$  为复电阻率;  $\rho_0$  为零频电阻率;  $m$  为极化率;  $\tau$  为时间常数;  $c$  为频率相关系数。

因此, 这里对于同时考虑激电和电磁效应的正演计算, 也用了一个 Cole—Cole 模型表示剖分后的三维体各均匀小单元及均匀大地复电阻率。

#### 6 激电和电磁效应并存时正演模型试算

对于电偶源激发时激电和电磁效应并存的情况, 设计了一个埋深  $50 \text{ m}$ , 长  $200 \text{ m}$ 、宽  $100 \text{ m}$ 、高  $200 \text{ m}$  的极化长方体, 在异常体正上方的地表处敷设一个偶极距  $P_E = 1$  的电偶极子, 分析其复电阻率参数及工作频率变化对观测点电场的影响。图 3、图 4、

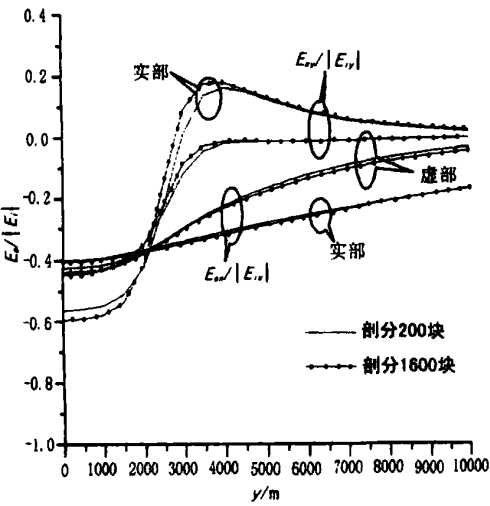


图 2 平面波激发时不同剖分方式下计算结果  
Fig.2 Plane wave stimulation results calculated by different division ways

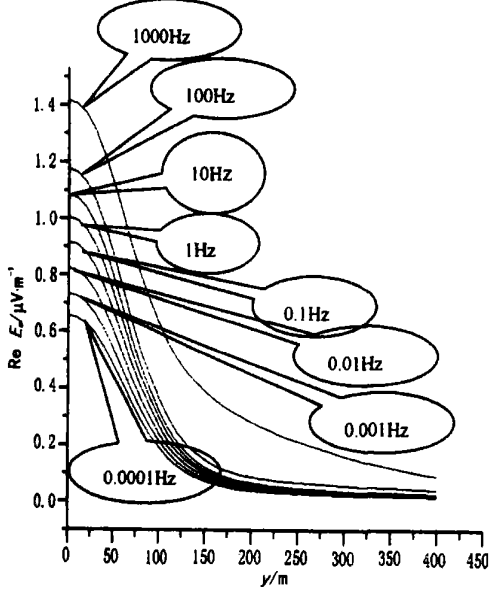


图 3 不同工作频率时散射电场沿 y 轴变化情况  
Fig.3 Variation along axis "y" of scattered electric field under different operating frequency

图 5 为工作频率、异常体 Cole—Cole 模型参数时间常数、频率相关系数,取不同值时,散射场沿 y 轴方向的变化趋势图。图中电偶源坐标为(0,0,0),异常体中心点坐标为(0,0,150)。图 3 是在异常体极化而围岩不极化时,散射场在不同工作频率下的变化情况。其中,围岩电阻率为  $100\ \Omega\cdot\text{m}$ ;极化异常体零频电阻率为  $50\ \Omega\cdot\text{m}$ ;极化率为 0.6;频率相关系数为 0.2;时间常数为 100 s。从图 3 可知,散射场随频率的增加而增大 在频率较低时散射场沿 y 轴方向变化特征基本相同;而频率较高(如 1 000 Hz)时,散射场变化较大。图 4 为模型异常体和围岩都极化,且

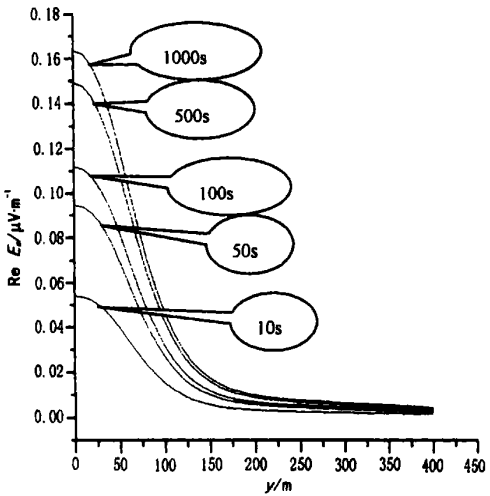


图 4 不同时间常数时散射电场沿 y 轴变化情况  
Fig.4 Variation along axis "y" of scattered electric field under different time constant

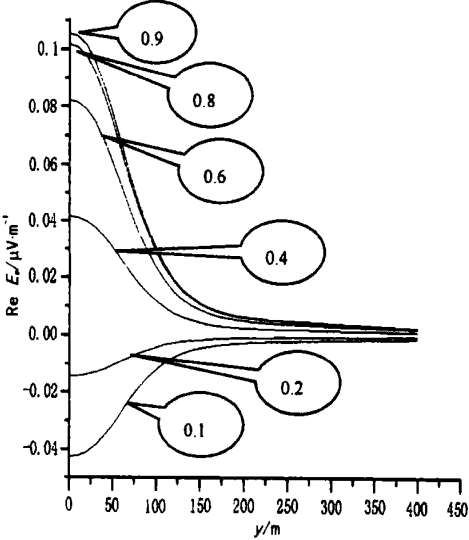


图 5 不同频率相关系数时散射电场沿 y 轴变化情况  
Fig.5 Variation along axis "y" of scattered electric field under different frequency dependent coefficient

异常体复电阻率参数除时间常数外都与围岩复电阻率参数相同时,散射场沿 y 轴的变化情况图。其中,零频电阻率为  $100\ \Omega\cdot\text{m}$ ,极化率为 0.6,频率相关系数为 0.25,围岩时间常数为 1 s。从图 4 中可知,在异常体附近散射场值随异常体时间常数的增加而增大,随着收发距的增大,不同时间常数的散射电场趋于极小值。图 5 是异常体和围岩都极化,且异常体频率相关系数与围岩的不相同,异常体和围岩的零频电阻率为  $100\ \Omega\cdot\text{m}$ ,极化率为 0.6,时间常数为 100 s,围岩频率相关系数为 0.25 从图 5 可知,当极化体频率相关系数小于围岩频率相关系数时,散射电场出现负值;在异常体附近散射场值随异常体

文章编号: 1001-1986(2006)01-0074-03

# 非开挖导航仪探头的设计与开发

刘国华<sup>1</sup>, 侯迪波<sup>1</sup>, 周泽魁<sup>1</sup>, 乌效鸣<sup>2</sup>, 向荣忠<sup>3</sup>

(1. 浙江大学控制科学与工程系, 杭州 310027; 2. 中国地质大学(武汉) 工程学院, 武汉 430074; 3. 杭州海博地基技术有限公司, 杭州 310000)

**摘要:** 结合非开挖导航仪器中探头部分的整体构成原理与设计, 介绍了倾角、工具面向角等关键技术参数的检测原理与方法。对于倾角, 采用单轴加速度传感器测量, 并着重分析了消除安装误差的方法; 对于工具面向角, 采用了自行设计的光电式面向角传感器。应用与研究表明, 各参数的测量均满足了地下工作的要求。

**关键词:** 非开挖钻进; 导航仪; 探头;

**中图分类号:** P634.7 **文献标识码:** A

## Design and development of the transmitter of No-Dig navigating instrument

LIU Guo-hua<sup>1</sup>, HOU Di-bo<sup>1</sup>, ZHOU Ze-kui<sup>1</sup>, WU Xiao-ming<sup>2</sup>, XIANG Rong-zhong<sup>3</sup>

(1. Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Department of Engineering, China University of Geoscience, Wuhan 430074, China;

3. Hangzhou HaiBo Groundwork Technology Ltd, Hangzhou 310000, China)

**Abstract:** The measure theories and methods of tilt angle and face angle are introduced combining with the composing principle and design of the transmitter of No-Dig navigating instrument. For tilt angle, the single axes accelerate sensor is used and put emphasis on the method that remove the install error; for face angle, the photo electricity face sensor designed by ourselves is adopted. Through the skilled using and innovated research, the measured parameters can meet the need of underground operations.

**Key words:** no-digging drilling; navigating instrument; transmitter

收稿日期: 2005-04-04

作者简介: 刘国华(1980—), 男, 湖北荆门人, 浙江大学在读博士, 从事自动化仪表与计算机控制技术方向的研究。

与围岩频率相关系数的差异增加而增大。

## 7 结束语

积分方程只须对异常体进行剖分和求积, 不涉及微分方法中的吸收边界等复杂问题, 因此, 利用直接求解体积分方程的方法, 模拟了电偶源激发时均匀导电半空间激电和电磁效应并存的三维体响应, 并在验证了该算法的正确性基础之上, 分析了复电阻率效应的重要参数(时间常数  $\tau$ 、频率相关系数  $c$ )对极化异常体散射场的影响, 为下一步三维复电阻率及其参数反演提供了正演依据。

## 参考文献

- [1] Xiong Z, Luo Y, Wang S, et al. Induced-polarization and electromagnetic modeling of a three-dimensional body in a two-layer anisotropic earth [J]. Geophysics, 1986, 51: 2235—2246.
- [2] 罗延钟, 张桂青. 频率域激电法原理[M]. 北京: 地质出版社, 1988.
- [3] Hohmann G W. Three dimensional induced polarization and electromagnetic modeling[J]. Geophysics, 1975, 40(2): 309—324.

- [4] Wannamaker P E, Hohmann G W, SanFilipo W A. Electromagnetic modeling of three dimensional bodies in layered earths using integral equations[J]. Geophysics, 1984, 49(1): 60—74.
- [5] 朴化荣, 薛爱民, 金 东, 等. 积分方程法求解三度体的激发极化效应[J]. 物化探计算技术, 1985, 7(4): 310—325.
- [6] Misac N Nabighian. 勘查地球物理—电磁法[M]. 北京: 地质出版社, 1992.
- [7] Chave A D. Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion[J]. Geophysics, 1983, 48(12): 1671—1686.
- [8] 翁爱华, 王雪秋. 利用数值积分提高一维模型电偶源电磁测深响应计算精度[J]. 西北地震学报, 2003, 25(3): 193—197.
- [9] 张 辉, 李桐林, 董瑞霞, 等. 利用高斯求积和连分式展开计算电磁张量格林函数积分[J]. 地球物理学进展, 2005, 19(3): 582—587.
- [10] Anderson W L. Numerical integration of related Hankel transforms of order 0 and 1 by adaptive digital filtering[J]. Geophysics, 1979, 44(10): 1287—1305.
- [11] Johansen H K. Fast Hankel transform[J]. Geophys Prosp, 1979, 27: 877—901.
- [12] 李建良, 蒋 勇, 汪光先, 等. 计算机数值方法[M]. 南京: 东南大学出版社, 2000.
- [13] Pelton W H, Sward S H, Hallof P G, et al. Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP [J]. Geophysics, 1978, 43(3): 588—609.