文章编号: 1001-1986(2002) 06-0035-03

灰色马尔可夫链在深基坑沉降预测中的应用

刘志彬, 施 斌 (南京大学地球科学系地球环境计算工程研究所, 江苏 南京 210093)

摘要: 针对深基坑在开挖后的施工过程中, 由于多种因素引起的沉降变形具有随机性的特点, 采用灰色马尔可夫链模型对上海市某深基坑的沉降进行了成功预测。结果表明, 利用灰色马尔可夫链对深基坑的沉降变形进行预测是可行的。

关 键 词: 灰色马尔可夫链; 深基坑; 沉降; 预测
中图分类号: TU441⁺.7　　文献标识码: A

1 引言

灰色系统理论把观测数据序列看作随时间变化的灰色过程, 通过累加生成挖掘出系统潜藏的有序的指数规律, 从而建立相应的预报模型[1,2]。马尔可夫链适合于随机波动性较大问题的预测, 能够揭示出系统受各种复杂因素影响的随机性。用灰色 GM(1,1) 模型来体现其灰色性, 用马尔可夫动态过程来反映系统受影响的随机性[3], 通过两种模型的有机结合达到科学预测的目的。

深基坑在开挖后的施工过程中, 各个位置会产生不同程度的沉降变形, 其影响因素较为复杂, 且随外界条件具有一定的随机波动性, 因此本文探讨了利用灰色马尔可夫链进行深基坑沉降预测的可能, 并取得了较好的预测效果。

2 灰色 GM(1,1) 建模

考察原始非负时间序列 $\{u^{(0)}(k)\}$, 作一次累加生成(1—AGO), 得 $\{u^{(1)}(k)\}$, 其中:

$$u^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}u^{(0)}(i),\ k=1,2,\cdots,N。\qquad(1)$$

构造一阶常微分方程逼近累加生成序列, 并利用最小二乘法求得系统的时间响应方程:

$$u^{(1)}(k+1)=\left[u^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak}+\frac{b}{a},\qquad(2)$$

其中 a 为常系数; b 为对系统的定常输入。当 $k=1,2,\cdots,N-1$ 时, 由式(2)算得的数据为拟合值; 当 $k\geqslant N$ 时, 算得的是预测值。然后再用累减运算还原, 即:

$$\begin{aligned}u^{(0)}(k+1)&=u^{(1)}(k+1)-u^{(1)}(k)\\&=(1-e^{a})\left[u^{(1)}(1)-\frac{b}{a}\right]e^{-ak},\ k=1,2,\cdots N-1。\end{aligned}\qquad(3)$$

该模型反映的是实际观测数据的趋势变化, 由于尚未考虑各种影响因素导致的随机变化, 因此用于预测还不够完善。

3 马尔可夫链预测原理

3.1 马尔可夫链

设有随机过程 $\{x_n, n\in T\}$ 和离散的状态集 $I=\{i_0, i_1, i_2, \cdots\}$, 若对任意的整数 $n\in T$, 条件概率满足:

收稿日期: 2002-06-18
作者简介: 刘志彬(1976—), 男, 河北灵寿县人, 南京大学在读博士生, 主要从事非饱和土性质及土的微观结构研究.

参考文献

[1] 张人权等编译. 同位素方法在水文地质中的应用[M]. 北京: 地质出版社, 1983.
[2] 尹观. 同位素水文地球化学[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1988.

Applying the natural isotopic tracer to analyse the water source from the 4th coal roof of Huafeng Coal Mine

LIU Feng, DUAN Qi, LIU Qi—sheng, ZHANG Zhuang—lu (Xi′an Branch, CCRI, Xi′an 710054, China)

Abstract: In this article, through the analysing information of $\delta^{18}O$、δD、^{3}H from the different aquifers and seepage water from coal roof in Huafeng Coal Mine, the conclusion can be drawn: up and lower sections of conglomerate aquifer of the Tertiary system are not hydaulic connection, they have different origins, the seepage water from the 4th coal roof is not the injecttion water but sandstone water.

Key words: isotopes; groudwater source; Huafeng Coal Mine

$$P\{x_{n+1}=i_{n+1}|x_0=i_0, x_1=i_1, \cdots, x_n=i_n\} = P\{x_{n+1}=i_{n+1}|x_n=i_n\}, \tag{4}$$

则称$\{x_n, n\in T\}$为马尔可夫链[4], 并记:

$$P_{ij}^{(k)}=P\{x_{m+k}=j|x_m=i\}, (i,j\in I), \tag{5}$$

表示在时刻 m 系统处于状态 i 条件下, 在时刻 $m+k$ 系统处于状态 j 的概率; 将 $P_{ij}^{(k)}$ 依次排序, 可得如下矩阵:

$$\boldsymbol{p}^{(k)}=\begin{vmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \cdots & p_{2n}^{(k)} \\ & & \cdots & \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \cdots & p_{m}^{(k)} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

该矩阵称为马尔可夫链的 k 步转移概率矩阵。其中:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(k)}=1。 \tag{7}$$

3.2　转移概率计算

将数据序列分为若干种状态, 记为 $E_1, E_2, \cdots, E_n$, 数据序列由状态 E_i 经过 m 步转移到 E_j 的概率称为 m 步转移概率, 记为 $p_{ij}^{(k)}$。

$$p_{ij}^{(k)}=\frac{m_{ij}^{(k)}}{M_i}, \tag{8}$$

式中　$m_{ij}^{(k)}$ 为状态 E_i 经过 k 步转移到 E_j 状态的次数; M_i 为状态 E_i 出现的次数。由于数据序列最后的状态转向不明确, 故计算 M_i 时要去掉数据序列中最末的 k 个数据。

3.3　编制预测表格

系统各种状态转移的统计规律在状态转移概率矩阵 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ 中得到了反映。通过考察状态转移概率矩阵 $\boldsymbol{p}^{(k)}$, 则可预测系统未来的发展变化。预测时需要先列出预测表, 表的编制方法是: 选取离预测时刻最近的 j 个时刻, 按离预测时刻的远近, 转移步数分别定为 1, 2, …, j, 在转移步数所对应的转移矩阵中, 取起始状态对应的行向量, 从而组成新的概率矩阵, 对新的概率矩阵将其列向量求和, 其和最大的列向量的状态即为待预测状态。

4　应用实例

以上海某深基坑工程为例, 其坑周边呈不规则多边形, 开挖面积 9 000 m², 平均挖土深度 13.40 m。工程毗邻诸多建筑物, 四周地面交通繁忙, 地下管线复杂。特别是紧邻基坑工程的某商场, 基坑开挖前已呈较大的沉降(最大达 9 cm), 且整体已呈向基坑倾斜之势。因此, 在基坑施工中能否保证相邻建筑物的安全是个重要问题。为此在对商场进行加固的同时, 进行严格监测, 作为研究个案本文仅选取基坑中一个测点进行了预测, 监测数据见表 1。

表 1　灰色 GM(1,1) 模型拟合值 实测值和偏差

日　期	监测值/mm	拟合值/mm	δ	状　态
2-09	34	34	0	—
2-15	35	35.27	0.77	2
2-21	35	35.98	2.72	1
2-27	37	36.70	-0.82	3
3-05	38	37.44	-1.50	3
3-11	38	38.19	0.50	2
3-17	40	38.96	-2.67	4
3-23	40	39.74	-0.65	3
3-29	41	40.54	-1.13	3
4-04	43	41.36	-3.97	4
4-06	43	42.19	-1.92	3
4-12	43	43.04	0.09	2
4-18	43	43.90	2.05	1
4-24	45	44.78	-0.49	3
4-30	45	45.68	1.49	2
5-06	47	46.60	-0.86	3
5-12	47	47.54	1.14	2
5-18	48	48.49	1.01	2
5-24	49	49.47	0.95	2
5-30	49	50.46	2.90	1
6-01	49	51.48	4.82	1
6-07	51	52.51	2.88	1
6-13	54	53.57	-0.80	3
6-19	57	54.64	-4.31	4
6-25	58	55.74	-4.05	4

4.1　建立灰色 GM(1,1) 模型

据已有沉降监测数据求得时间响应趋势线为:

$$u^{(0)}(k+1)=34.575\,\mathrm{e}^{0.0199k}, \tag{9}$$

由(9)式算得相应的基坑沉降拟合值(表 1)。

4.2　状态划分

将拟合值与实测值的偏差放大 100 倍后得 δ(表 1), 再加以分析。

$$\delta=100\times[u^{(0)}(k+1)-u'(k+1)]/u^{(0)}(k+1), \quad k=1,2,\cdots,N-1。 \tag{10}$$

确定以 δ所处的不同上下阈值作为状态划分的标准, 见表 2。具体阈值的大小并无严格要求, 但当数据量较小时以划分较少的状态为宜, 以保证预测的准确性。据表 2, 将监测数据序列进行状态划分(表 1)。

表 2　状态划分的标准

状　态	状态界限
$E1$	$\delta = (2, 5]$
$E2$	$\delta = (0, 2]$
$E3$	$\delta = (-2, 0]$
$E4$	$\delta = [-5, -2]$

4.3　构造状态转移概率矩阵

$$P^{(1)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{4} & \frac{0}{4} & \frac{2}{4} & \frac{0}{4} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{0}{8} & \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{0}{4} & \frac{0}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}; \quad P^{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{0}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{0}{7} \\ \frac{0}{8} & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{0}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{0}{3} \end{vmatrix};$$

$$P^{(3)} = \begin{vmatrix} \frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{0}{7} \\ \frac{0}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{0}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}; \quad P^{(4)} = \begin{vmatrix} \frac{0}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{0}{3} \end{vmatrix}。$$

4.4　编制预报表

利用状态转移概率矩阵, 选择离预报时刻最近的4 个时段。其转移步数分别定为 1, 2, 3, 4。在转移步数所对应的转移矩阵中, 取起始状态所对应的行向量, 得到新的概率矩阵。(表 3)

从表中可以看出在预报时刻 7 月 1 日, 基坑沉降值处于 $E3$ 状态的概率为最大, 表示未来基坑沉降拟合值与实际沉降的残差最可能处于状态 $E3$, 故预测其沉降大小为:

$$H = u^{(0)}(k+1)\left[1-\bar{\delta}\%\right] = 34.575e^{0.0199k}(1+1\%) = 34.921e^{0.0199k}, \qquad (11)$$

其中
$$\bar{\delta} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \qquad (12)$$

δ_1, δ_2 分别为某一特定状态的上下限。

此时, $k = 25$, 得 $H = 57.43$ mm, 而实际监测值为58 mm, 采用GM(1, 1) 模型拟合值为 56.86 mm, 可见前者精度较后者明显提高。

表 3　状态预测计算表

初始状态	转移步数	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$
$E1$	4	0	0	0.333	0.667
$E3$	3	0	0.429	0.429	0.143
$E4$	2	0	0.667	0.333	0
$E4$	1	0	0	0.750	0.250
	合计	0	1.096	1.845	0.060

计算表明, 灰色马尔可夫链模型在监测数据增多时, 精度提高效果更加明显。

5　结语

a.　灰色马尔可夫模型既考虑了从时间序列中挖掘数据的演变规律, 又通过状态转移概率矩阵的变换, 提取数据的随机响应。因而, 它将时间序列数据固有的两种性质有机结合起来, 具有严密的科学性。

b.　灰色马尔可夫模型是建立在对历史数据的统计分析基础之上的, 因此历史数据越准确, 精度越高。

c.　灰色马尔可夫模型原理浅显易懂, 计算过程简单, 易于编程实现, 随监测数据的增加实时修正预测模型, 可以实现高精度的预测。

d.　将灰色马尔可夫模型应用于深基坑的沉降变形预测是切实可行的, 但仍有问题值得探讨, 比如, 系统状态的划分标准。数据量的大小对状态划分是个关键因素。数据量小时, 状态划分也不宜太多, 这样可以保证预报的准确度。此外, 预测模型推广的可靠度等也有待于进一步研究。

参考文献

[1]　邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1986.

[2]　王新民, 杨天行等. 应用数值方法[M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992.

[3]　庞南生. 灰色马尔可夫链在投资预测中的应用[J]. 电力技术经济, 1999, (4): 15－17.

[4]　刘次华. 随机过程(第二版)[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001.

The settlement prediction of deep excavation based on Gray Markov Chain Model

LIU Zhi-bin, SHI Bin (Department of Earth Sciences, ACEI, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: In consideration of the randomicity of the subsidence during construction after the excavation of deep groove because of various factors, the paper succeeds to apply Gray Markov Chain Model into the settlement prediction of a deep excavation in Shanghai. The result shows that it is practicable to predict the settlement deformation in deep excavation through this method.

Key words: Gray Markov Chain; deep excavation; settlement; prediction