

• 煤田物探 •

# 电偶源瞬变电磁测深研究 ( 六 )

## ——瞬变场资料的反演解释

陈明生 ( 煤炭科学研究总院西安分院 710054)

阎 述 ( 西安交通大学电子与信息工程学院微波与光通信研究所 710049)

**摘要** 阐述了用广义逆矩阵反演瞬变电磁测深资料的方法和实际效果,重点解决大偏移距电偶源瞬变电磁测深资料的反演。

**关键词** 瞬变电磁测深 广义逆矩阵 反演

**中国图书资料分类法分类号** P631.325

**作者简介** 陈明生 男 59岁 研究员 硕士 应用地球物理

### 1 引言

电偶源瞬变电磁测深的资料解释方法有多种,诸如视纵向电导、拟地震和博斯蒂克<sup>[1]</sup>等方法,但是最通用和成熟的方法仍然是最优化法——各种最小二乘法,即曲线拟合法。曲线拟合是一个非线性模型修正问题,一般采用高斯—牛顿法、梯度法和阻尼最小二乘法(马夸特法)。高斯—牛顿法如能使反演收敛,则收敛速度快,但一般不稳定,往往发散;梯度法能保证稳定反演,但收敛慢,特别是逼近极小点时更慢;马夸特法具有两者的优点,并克服了两者的缺点。

70年代以来,利用广义逆矩阵自动反演<sup>[2,3]</sup>地球物理资料,在国内外愈加受到重视,这是因为广义逆矩阵反演稳定性好,适应性强,而且能提供很有用的辅助信息。我们在本文中就广义逆矩阵反演的要点和效果加以阐述。

### 2 问题分析

在瞬变电磁测深(电偶源和磁偶源瞬变电磁测深)中,研究的对象一般是水平层状地电断面。设有 $k$ 层,就有 $n=2k-1$ 个参数(电阻率和厚度),记录为列向量 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$ ;实际观测数据为 $m$ 个,是对应不同时间(道)的二次场衰减值或转换视电阻率值,亦记为列向量 $e_t = [e_{t1}, e_{t2}, \dots, e_{tm}]^T$ 。一般情况下 $m > n$ 。各时间道理论响应值是地电模型参数 $\lambda$ 的函数,记为 $e(\lambda) = [e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_m(\lambda)]^T$ 。在测深曲线反演中,层状模型理论值与观测值进行拟合,应使目标函数

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^m (e_{ti} - e_{\tau})^2 = \sum_{i=1}^m f_i^2(\lambda) = \|f(\lambda)\|^2 = \text{极小}, \quad (1)$$

式中 $t$ 与 $\tau$ 对应相同时间,仅是观测值和理论值的区别,显然这是一个非线性最小二乘问题,因为 $e_{\tau}$ ( $\lambda$ 是多元非线性函数。求解

$$\nabla F(\lambda) = 0 \quad (2)$$

的非线性最小二乘问题是非常困难的,因为方程组(2)的解是驻点,不一定是极小点。

实际上通过函数 $f_i(\lambda)$ 的线性化和迭代计算,最终能使(1)式得到满足。为此将 $f_i(\lambda)$ 展开为台劳级数,取其一阶近似, $F(\lambda)$ 就成为二次函数,则 $\nabla F(\lambda)$ 的分量都是线性函数,从而将(2)式化为线性方程组的求解问题。设初始模型参数选为 $\lambda^{(0)}$ ,便有

$$f_i(\lambda) \approx f_i(\lambda^{(0)}) + [\nabla f_i(\lambda^{(0)})]^T \Delta \lambda \quad (3)$$

其中 $\lambda = \lambda^{(0)} + \Delta \lambda$ ,

$$\nabla f(\lambda^{(0)}) = \left[ \frac{\partial f_1(\lambda)}{\partial \lambda}, \frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda}, \dots, \frac{\partial f_m(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda^{(0)}}, \\ i=1, 2, \dots, m。$$

于是

$$f(\lambda) \approx f^{(0)} - A^{(0)} \Delta \lambda \quad (4)$$

其中

$$f^{(0)} = f(\lambda^{(0)}) = e_t - e_{\tau}^{(0)} = \Delta e^{(0)},$$

$$A^{(0)} = [a_{ij}]_{\lambda=\lambda^{(0)}} = \left[ \frac{\partial e_{\tau}(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda^{(0)}},$$

$$i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n。$$

这样,问题就近似化为求超定方程

$$A \Delta \lambda - \Delta e = 0 \quad (5)$$

的最小二乘解,即求 $\Delta \lambda$ 使

$$\| \Delta e - A \Delta \lambda \|^2 = \text{极小},$$

即将(5)式化为法方程

$$A^T A \Delta \lambda - A^T \Delta e = 0 \quad (6)$$

求解。

直接求解法方程组(6)就是高斯—牛顿法。由于

系数矩阵  $A^T A$  含有小特征值(  $\sigma$  ), 使方程组呈病态, 导致其解不稳定; 甚至  $A^T A$  含有零特征值而呈奇异, 致使无法求解。方程迭代过程的稳定性可用  $A^T A$  的条件数  $K(A^T A)$  来量度, 其表达式为

$$K(A^T A) = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sigma_{\min}^2} \tag{7}$$

其中  $\sigma_{\max}$  和  $\sigma_{\min}$  为  $A^T A$  的最大和最小特征值。显然  $K$  是大于或等于 1 的数,  $K$  愈大,  $A^T A$  的条件就愈坏, 方程组的求解就愈不稳定。当  $A^T A$  的主对角线元素都加一个正数, 相当特征值都加同样大的一个正数,  $K$  值变小,  $A^T A$  的条件得到改善。加大法方程系数矩阵对角元素的办法称阻尼最小二乘法, 即马夸特法。这种方法已成为电法反演的主要方法。

还可数值稳定性较强的算法, 直接解超定方程组( 5 ), 这就是广义高斯—牛顿法或称广义逆矩阵法。方程组( 5 ) 的系数矩阵条件数为

$$K(A) = \frac{|\sigma_{\max}|}{|\sigma_{\min}|} \tag{8}$$

显然  $K(A)$  相对  $K(A^T A)$  缩小  $\frac{|\sigma_{\min}|}{|\sigma_{\max}|}$  倍, 所以直接解超定方程组( 5 ) 比解法方程组( 6 ) 要稳定。如果采用加阻尼的办法, 可以使解更加稳定, 这就是改进广义逆矩阵反演法。

### 3 改进广义逆矩阵反演法

根据 Lanezos 的理论, 任意的  $m \times n$  阶矩阵  $A$  可以表达为

$$A = U_r \Sigma V_r^T \tag{9}$$

$U_r$  是  $m \times r$  阶矩阵, 其各列  $u_i$  称为观测数据特征向量;  $V_r$  是  $n \times r$  阶矩阵, 各列  $v_j$  称为参数特征向量;  $\Sigma$  是  $r \times r$  阶对角阵, 其元素分别为  $A^T A$  或  $AA^T$  的  $r$  个非零特征值的正平方根, 称为奇异值。

Lanezos 根据矩阵的奇异值分解表达式, 定义了如下的广义逆矩阵

$$H_L = V_r \Sigma^{-1} U_r^T \tag{10}$$

这是一个超定方程, 解之得

$$\Delta \lambda = H_L \Delta e \tag{11}$$

虽然解超定方程组( 5 ) 比解法方程组( 6 ) 条件要好, 要稳定; 但是仍然会遇到小奇异值的情况, 导致解的不稳定性。按照马夸特法的思路, 加阻尼改善解方程的条件。于是 Jupp 等人提出改进广义逆矩阵

$$B^+ = V_r T_r \Sigma^{-1} U_r^T \tag{12}$$

其中  $T_r$  是对角矩阵 对角元素取为

$$t_i^{(N)} = \sigma_i^{2N} / (\sigma_i^{2N} + \alpha^N), \tag{13}$$
$$i = 1, 2, \dots, r.$$

$\alpha$  是一个小的正数, 为阻尼参量;  $N$  是正整数, 由此改进广义逆矩阵的解写成

$$\Delta \lambda = B^+ \Delta e \tag{14}$$

迭代计算方程组( 14 ), 不断修改地层参数  $\lambda$  直到观测曲线和理论模型曲线达到一定判据时拟合为止。但是具体计算应解决一些算法问题, 才能取得好的反演效果。

#### 3.1 采用对数比例尺计算

观测数据和模型参数都应取对数计算, 其原因: 从物理意义上讲数据和参数都应为正; 电磁场在地下按指数衰减; 数据的变化范围大, 特别是二次场的动态范围更大。这样, 目标函数的表达式为

$$F(\ln \lambda) = \| \Delta_{ne} - A \Delta_n \lambda \|^2 + \alpha^N \| \Delta_n \lambda \|^2, \tag{15}$$

式中  $A = [a_{ij}] = [\frac{1}{e_j(\lambda)} \frac{\partial e_j(\lambda)}{\partial \lambda}]_{\lambda = \lambda^{(k)}}$ 。

对  $A$  进行奇异值分解后, 构造  $B^+$ , 可得

$$\Delta_n \lambda = B^+ \Delta_{ne} = V_r T_r \Sigma^{-1} U^T \Delta_{ne}, \tag{16}$$

然后变换成

$$\Delta \lambda = \Lambda^{(k)} \Delta_n \lambda$$
$$(\Lambda = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)),$$

改正后的参数为

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \Delta \lambda \tag{17}$$

#### 3.2 阻尼的选择

阻尼系数  $\alpha$  可通过试算选择。由( 13 ) 式知, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 相当奇异值截除法, 使被截除的奇异值对应的参数得不到改正, 效果就差。

当  $N = 1$  时效果一般都要比较好, 适应性强。这实际上相当马夸特法; 但是比马夸特法效果要好, 这是应当关注的。原因是马夸特法所含的系数矩阵为  $A^T A$ , 而广义逆的系数矩阵为  $A$ , 前者的条件较后者差, 而且对信息进行了改造, 这就使马夸特法较改进的广义逆矩阵法反演效果略逊一筹, 实算结果也说明了这点。

#### 3.3 控制迭代终止的判据

我们曾选择如下一些指标为判据:

$$\text{拟合差 } PN = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{e_{ii} - e_{\tau}}{e_{ii}^2};$$

$$\text{参数相对改正量 } PE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \lambda_j^2}{\lambda_j^2};$$

$$\text{目标函数梯度 } \nabla F(\lambda) = \frac{dF(\lambda)}{d \ln(\lambda)}.$$

在实际反演中, 由于地电断面不同, 观测数据质量有别, 很难预先定出一个统一的判据。实际计算说明, 利用“阻尼参量  $\alpha$  极小”这一标志控制迭代终止是有效的。这是因为随着迭代过程的进行, 一般情况

下阻尼是逐渐减小的,参数改正后逐渐逼近真值;如果继续减小阻尼,目标函数已不能下降,这时阻尼增大,继续迭代下去也不会使结果有明显改善。究其原因,在迭代过程中阻尼由大变小,意味着由梯度法向高斯-牛顿法过渡,收敛加快,使目标函数趋于极小点。如再迭代下去,要增加阻尼到很大,从而转向梯度法。用梯度法在极小点附近迭代,收效甚微。选择这时终止迭代是适宜的。

4 算例

我们首先对目前常用的共中心线框装置的资料进行改进广义逆矩阵反演,以检验反演效果,进一步对电偶源发射-垂直磁偶极子接收的模拟资料进行反演,将改进广义逆矩阵反演扩大应用。

[例 1] 该模型的真实参数构成 A 型地电断面,采用  $100\text{ m} \times 100\text{ m}$  重迭回线装置,对理论值取二次场衰减值  $V/I$  和视电阻率值  $\rho$  分别反演,结果列于表 1。

[例 2] 该例是野外实测数据的反演,野外采用中心探头观测垂直磁场的感生电动势,供电线框  $440\text{ m} \times 440\text{ m}$ ,中心线圈等效面积为  $100\text{ m}^2$ 。根据野外实测  $V/I$  数据反演拟合曲线示于图 1,反演结果列于表 2。

由图 1 看出,曲线拟合较好,仅 15 道曲线偏离较大,使反演结果受到较大影响,尤其是相应 15 道所涉及的层位可靠性降低。

表 1 A 型地电断面反演结果

参数	理论模型	初始模型	V/I 拟合		$\rho$ 拟合	
			参数	拟合差/%	参数	拟合差/%
$\rho$	1	5	1.0		1.0	
$\rho$	10	5	13.1		12.2	
$\rho$	100	50	74.3	0.09	71.6	0.5
$h_1$	50	100	50.4		50.4	
$h_2$	30	100	30.0		27.0	

表 2 野外实测数据反演结果表

参数	初始参数	拟合参数	近处钻孔资料
$\rho$	80	47.8	62
$\rho$	30	53.3	45
$\rho$	200	232.6	180
$\rho$	500	404.6	810
$\rho$	200	144.9	—
$\rho$	500	158.1	—
$h_1$	120	131.6	140
$h_2$	40	30.2	40
$h_3$	50	45.3	68
$h_4$	40	37.6	35
$h_5$	80	72.2	—
逆合差/%		3.6	

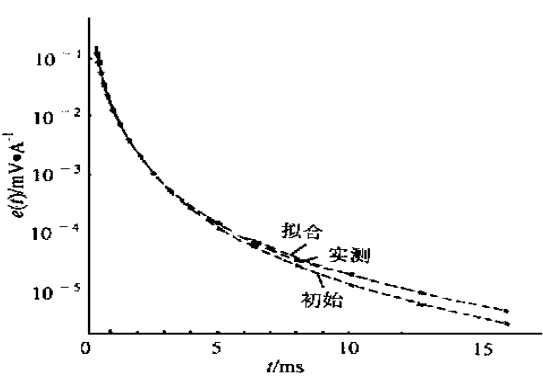


图 1 广义逆矩阵反演的曲线拟合图

[例 3] 这是 4 层地电断面模型,采用偏移距为 6 000 m 的电偶源发射-垂直磁偶极子接收装置。所获得的磁场数据可用感生电动势表示,也可采用磁场表示,从计算角度分析,后者的结果可能更精确,也容易转换为全区视电阻率。

垂直磁场曲线拟合结果及反演结果分别示于图 2 及表 3。

从图 2 看出,曲线拟合在一起,难于肉眼分辨偏差。但是从表 3 的反演结果看,参数的偏差大小不等,主要是第一层,无论从电阻率和厚度上都有较大的偏差,应为不灵敏参数层,这从初始曲线和理论曲线的首支差别不大就可理解。

表 3 4 层断面反演结果表

参数	理论值	初始值	拟合值
$\rho$	200	150	160.9
$\rho$	100	200	102.1
$\rho$	400	500	427.9
$\rho$	80	120	79.9
$h_1$	200	250	287.1
$h_2$	700	500	672.0
$h_3$	3000	350	2914
拟合差		0.06 %	
反演次数		5	
阻尼参量 $\alpha$		$10^{-5}$	

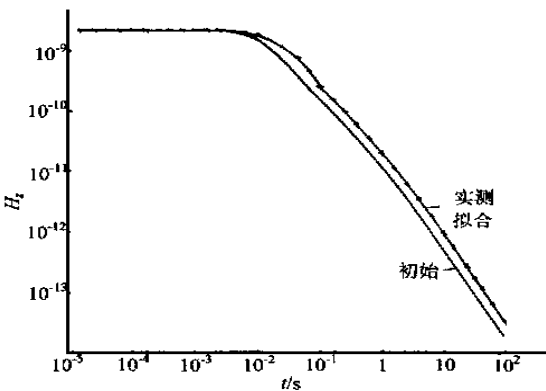


图 2 4 层模型反演的曲线拟合

# 一种离散化的最小曲率插值方法

陈 斌 (Deutsche Montan Technologie GmbH D45307 Essen 德国)

**摘要** 提出一种离散化的最小曲率曲面插值方法。它通过应用有限元方法得到对实际曲面曲率的真实估计,并进而讨论了对地层曲面插值中的断层边界的处理方法。

**关键词** 有限元法 断层边界 曲面模型 插值法

**中国图书资料分类法分类号** P631

**作者简介** 陈斌 男 33 岁 硕士 工程师 地球物理勘探

## 1 引言

对于离散点曲面插值问题,最小曲率法(MINQ)所采用的插值约束条件为:

$$E = \int_{\Omega} (k_1^2 + k_2^2) ds \rightarrow \min. \quad (1)$$

即要求对通过已知点集 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, n$ 的插值曲面 $\Omega$ 上两主曲率 $k_1, k_2$ 的平方和的积分值为最小。上述积分值被称为曲面能(blending energy)或粗糙度(roughness)。由于曲面曲率具有不依赖于空间坐标系统的内在独立性,因而它是衡量曲面弯曲变化程度的最佳参数。符合上述准则的曲面将是

通常所期望的“最光滑”的理想曲面。但事实上考虑到对曲面曲率计算的复杂性,一般常采用下式作为替代的约束条件:

$$E = \iint \left( \left| \frac{\partial f}{\partial x^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy \rightarrow \min. \quad (2)$$

即要求对曲面函数的二次偏导数项的平方和在插值区域内的积分值为最小。对它的显式全局解即常见的样条插值(thin plate splines, TPS)方法,可写作<sup>[1]</sup>:

$$z = f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + \sum b_i r_i^2 \log r_i. \quad (3)$$

## 5 结论

a. 对瞬变电磁测深资料进行反演,要解一个非线性超定方程组,一般要经过线性化迭代求解,只能得出最小二乘解。这种解一般并不唯一,需要参照其他信息,使结果更趋实际。

b. 采用改进广义逆矩阵进行反演,条件更好,适应性更强,只要适当的调整 $\alpha^N$ ,就可转化为其他类型的最小二乘法。像取 $N=1$ 就相当马夸特法,但它不对数据(信息)进行改造,使反演更加稳定,结果更趋真实。

c. 对瞬变场资料的反演,既可采用实测二次场数据,也可采用转换的视电阻率数据。前者数据不

会增加转换误差,但曲线特征不够明显;后者会带来转换误差,但特征明显。实际反演过程中,两者可结合进行,取其优。

## 参考文献

- 1 Meju M A. A simple method of transient electromagnetic data analysis. Geophysics, 1998; 63(2): 405~410
- 2 Jupp D L B, Vozoff K. Stable iterative methods for the inversion of geophysical data. Geophys. J. R. astr. Soc., 1975; 42: 957~976
- 3 陈明生, 陈乐寿, 王天生, 白改先. 用改进广义逆矩阵方法解释大地电磁测深及电测深资料. 地球物理学报, 1983; 26(4): 390~400

(收稿日期 1999-08-11)

## STUDY ON THE TRANSIENT ELECTROMAGNETIC (TEM) SOUNDING WITH ELECTRIC DIPOLE (VI) — THE INVERSION OF TEM DATA

Chen Mingsheng (Xi'an Branch of CCRI)

Yan Shu (Xi'an Jiaotong University)

**Abstract** In this paper the inverse method and practical effects of transient electromagnetic data are explained using the generalized matrix. The inverse of LOTEM data is emphasized.

**Keywords** Transient electromagnetic method; generalized inverse matrix; inverse