· 水文地质工程地质 ·

地下水模型的 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法*

姚磊华 (煤炭科学研究总院西安分院 710054)

摘要 讨论了求解地下水模型(水流模型和水质模型)的 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法。从基本的随机变量入手,避免了过程中随机变量的增多问题,给出结点水头(浓度)的均值、方差和水头在某区间的概率计算方法;改进了矩阵求逆的效率,对输入随机变量较多、随机变量变异较大的非稳定地下水问题特别有效。同时选取二维承压地下水水流问题(有解析解)作为例子,进行了随机数值模拟实验。

关键词 地下水 数学模型 Neumann 展开 Monte-Carlo 法 有限元法

中国图书资料分类法分类号 P641.2

作者简介 姚磊华 男 33 岁 博士 水文地质

1 引言

一般的地下水模拟并不考虑随机因素的影响,把真正的随机变量作为确定性变量来处理,如降水量和河水水位在模拟时常取均值,模拟预测的结果不能反映未来地下水变化的实际动态。实际上,地下水模型包含着许多随机因素,并受其制约和影响,从而具有一定程度的不确定性。把模型应用于预测和管理时,一个很重要的问题是怎样把模型的不确定性定量化,以保证模型使用的可靠性。

影响地下水数学模型不确定性的因素很多,概括起来主要有以下 3 个方面:

a. 模型中各种参数的不确定性;

b. 模型定解条件(初始条件和边界条件)的不确定性;

c. 方程的源汇项也可能是随机变化的。

由于模型包含着这些不确定性,所以模型的解(水头或浓度)应当是具有一定概率分布的随机函数。一般来说,若地下水定解问题中控制方程的系数或定解条件包含随机函数时,就称此定解问题为随机地下水定解问题,确定性模型可以认为是随机模型的特例。

Monte-Carlo 模拟是目前确定地下水模型不确定性的最有效的方法。其原理为:它假定随机变量的概率分布函数是已知的,且已知随机变量之间的相关结构(即协方差函数),可用伪随机数的生成技术生出成千上万组的输入变量,然后对每组输入变量运行数值模型,可获得成千上万组的模型计算结果。由此可计算出每个结点水头(浓度)的均值、方差和协方差,这样就获得模型结果的不确定性。然而 Monte-Carlo 模拟不能产生一个解析表达式,而要求运行数值模型的次数很多,需占用大量机时,花费较贵。El-Kadi 与 Brutsaert[1]、Freeze[2]、Jones[3]等曾对 Monte-Carlo 方法在地下水模拟中的应用作出过有益的贡献。80 年代后期 Shinozuka 和 Yamazaki[4]将 Neumann 展开和 Monte-Carlo 有限元相结合,提出了精度、效率均较高的 Neumann 展开 Monte-Carlo 有限元法(NMCSFEM),并应用于工程结构分析,但水文地质领域至今未见应用。

本文从基本的随机变量入手,首次将 NMCSFEM 应用于地下水模型的求解,避免了过程中随机变量的增多问题,提高了矩阵求逆的效率,给出某结

* 煤炭科学基金资助项目,地 20812

点水头(浓度)的均值和方差表达式,并给出了水头(浓度)在某区间的概率计算方法。

2 Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法

Neumann 展开式的引入,实质是为了解决矩阵求逆的效率问题。如果对每组随机抽样,只需形成一次刚度矩阵的逆,然后进行前代、回代及矩阵的乘法和加减法,而无需多次求逆,可大大减少工作量。

对地下水水流模型(水质模型)用有限元方法计算,要形成如下矩阵方程:

$$\boldsymbol{AH}=\boldsymbol{B} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为满秩刚度矩阵,$\boldsymbol{H}$ 为水头矩阵(亦可为浓度矩阵 $\boldsymbol{C}$),$\boldsymbol{B}$ 为右端项。

假设刚度矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在随机变量影响下可分解为:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\Delta\boldsymbol{A} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0$ 为随机变量均值处的刚度矩阵,$\Delta\boldsymbol{A}$ 为刚度矩阵的波动量,对 Monte-Carlo 随机抽样,刚度矩阵只改变 $\Delta\boldsymbol{A}$ 项。

根据 Neumann 展开式,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 可写为:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}_0+\Delta\boldsymbol{A})^{-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^2-\boldsymbol{P}^3+\cdots)\boldsymbol{A}_0^{-1}, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_0^{-1}\Delta\boldsymbol{A}$。

从方程(1)得:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{B}, \tag{5}$$

因此,

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^2-\boldsymbol{P}^3+\cdots)\boldsymbol{A}_0^{-1}\boldsymbol{B}。 \tag{6}$$

若令

$$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{PH}_0,\text{则 } \boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{PQ}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{PQ}_{i-1}, \tag{7}$$

(6)式可表示为:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0-\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{Q}_3+\cdots。 \tag{8}$$

Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法求解地下水问题的一般步骤:

a. 确定基本随机变量及其随机特征;

b. 将各随机变量取均值代入有限元控制方程,求出均值下的解及刚度逆矩阵;

c. 产生一组基本随机变量的随机数,将其代入到地下水模型有限元方程中;

d. 采用 Neumann 展开求出有限元方程的解;

e. 重复步骤 c~d,直到设定的样本总数。

记 i 结点 t_n 时刻的水头(浓度)实现值为 $H_{in}(\xi_k)$ 则它的数学期望的近似值可用下式计算:

$$\mathrm{E}(H_{in})\approx\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}H_{in}(\xi_k)。 \tag{9}$$

同时用下式近似计算 $H_{in}(\xi_k)$ 的方差近似值:

$$\mathrm{Var}(H_{in})\approx\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[H_{in}(\xi_k)-\mathrm{E}(H_{in})]^2。 \tag{10}$$

其中 E 为数学期望算子;Var 为方差算子;N 为总实现次数;$H_{in}(\xi_k)$ 为第 k 次实现值。

$H_{in}(\xi_k)$ 在区间 $[a,b]$ 的概率可用下式计算:

$$P_{in}[a,b]\approx M/N。 \tag{11}$$

其中 M 为实现在区间 $[a,b]$ 的次数。

NMCSFEM 由于采用了 Monte-Carlo 随机模拟技术,因此不受随机变量波动范围的限制,并且可计算不同结点同一时刻的水头(浓度)协方差,同一结点不同时刻的水头(浓度)协方差等。

Neumann 展开 Monte-Carlo 随机有限元法计算流程图见图 1。

非稳定流模拟时,对某一组随机变量应该从第一时间段计算到目的时间段,然后再计算另一组随机变量从第一时间段计算到目的时间段……如果对所有随机变量组按时段一步一步向下计算,第二时段就产生各结点水头(浓度)及其它随机变量之间的协方差,由于计算量的问题可能无法再计算下去。对稳定流不存在此问题。

3 二维承压地下水水流模型算例

为了检验本文提出的随机模拟方法的有效性和

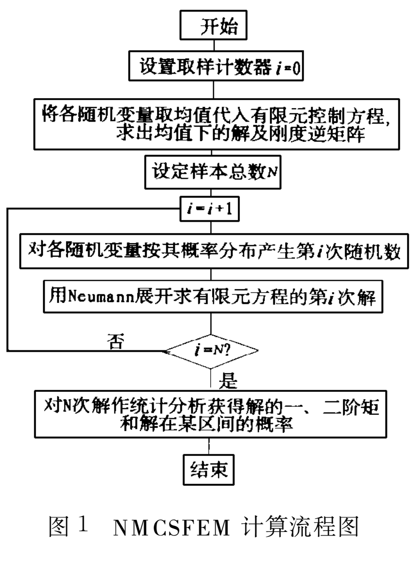

图 1 NMCSFEM 计算流程图

表 1　计　算　结　果

		结点号	1	2	3	4	5	6	7	8
水头均值	解析解	Time=0.1	100.000	99.826	99.561	99.131	98.458	97.330	96.526	93.416
		Time=10.0	100.000	99.554	99.035	98.386	97.546	96.312	95.481	92.360
	NMCSFEM	Time=0.1	100.000	99.825	99.615	99.321	98.848	97.981	97.065	93.891
		Time=10.0	100.000	99.507	98.988	98.401	97.666	96.588	95.612	92.406
水头方差	解析解	Time=0.1	33.333	33.335	33.346	33.371	33.418	33.514	33.590	33.959
		Time=10.0	33.333	33.334	33.339	33.351	33.373	33.424	33.470	33.725
	NMCSFEM	Time=0.1	33.337	33.350	33.367	33.392	33.435	33.524	33.629	34.078
		Time=10.0	33.335	33.349	33.368	33.392	33.429	33.495	33.567	33.882

可靠性,选择构造了一个有解析解的二维承压地下水水流模型算例。

假设承压含水层区域是边长为 a 的正方形,东西边界为定水头边界,水头为 H_1,南北边界为隔水边界,区域中心有一个抽水井以流量 Q 抽水,承压含水层的导水系数为 T。非稳定流定解问题如下:

$$T\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+T\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}-Q\delta(x-x_0,y-y_0)=S\frac{\partial H}{\partial t};$$

$$H(x,y,0)=H_1;$$

$$H(x,y,t)\big|_{AD}=H(x,y,t)\big|_{BC}=H_1;$$

$$\frac{\partial H}{\partial n}\Big|_{BC}=\frac{\partial H}{\partial n}\Big|_{AB}=0。$$

式中:x_0,y_0 为抽水井坐标;计算时,设正方形的边长 a 为 1 200 m,计算剖分图见图 2。

在此例中,设 H_1、T、Q、S 为 4 个相互独立的随机变量,就 4 个随机变量均为均匀分布的情况进行随机特征讨论。计算结果见表 1。从计算结果可以看出,NMCSFEM 解和解析解非常接近,说明 NMCS-FEM 具有较高的精度和可靠性。另外,我们用此文提出的方法对陕西省渭南市白杨水源地的潜

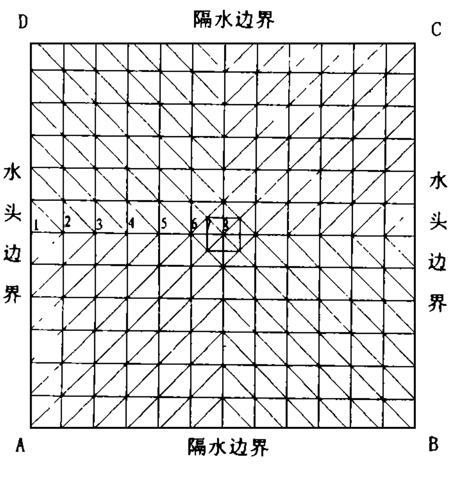

图 2　地下水水流模型及其有限元剖分图

水水质随机变化进行研究,取得了良好效果。具体模拟情况将另文叙述。

4　结论

a. 地下水水流模型的随机模拟,能更加真实地逼近客观水文地质条件,是水文地质研究的重要进步。以前的数值模拟,一般是取随机变量的一组数,然后运行数值模型得出 1 组结果。从本文的研究来看,这组结果和随机有限元所得的均值是有区别的,确定性模拟只是随机模拟的 1 个特例。

b. 本文讨论的地下水水流模型 Monte-Carlo 随机有限元法(NMCSFEM)是适应面最广,最有效的方法。无论随机变量的变差有多大,都能较好地模拟随机地下水流问题。

c. Monte-Carlo 随机有限元法的缺点是计算量大,其解的形式不是一个解析表达式。当随机变量数目较少,且随机变量变差较小时,可采用 Taylor 展开随机有限元方法(TSFEM)[5],精度和效率均较高。

此文得到国家地震局地质研究所罗焕炎研究员、宋惠珍研究员和煤炭科学研究总院西安分院李竞生研究员的指教,在此谨表谢意。

参考文献

1　El-Kadi A I, Brutsaert W. Applicability of effective paramenters for unsteady flow in nonuniform homogeneous aquifers. Water Resources Research, 1985; 21(2): 183～198

2　Freeze R A. A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional ground-water flow in nonuniform homogeneous media. Water Resources Research, 1975; 11(5): 725～741

3　Jones L. Explicit Monto Carlo simulation head moment estimates for stochastic confined grounder flow. Water Resources Research, 1990; 26: 1145～1153

用天然氚确定隐伏岩溶水滞留时间及含水层参数

马致远　高文义　郭建青　(西安地质学院　710054)

摘要　应用天然同位素及水体的完全混合模型,计算了平凉大岔河隐伏岩溶地下水的滞留时间、含水层储水系数及储存量。为西北干旱、半干旱非泉域的隐伏岩溶区的地下水资源评价提供了新的研究途径。

关键词　天然同位素　氚　地下水　滞留时间　储水系数　储存量

中国图书资料分类法分类号　P641.3

作者简介　马致远　女　40 岁　讲师　水文地质工程地质

1　引言

大岔河隐伏岩溶区位于甘肃省平凉市以南黄土丘陵地带,这里多年平均降雨量 511 mm,属大陆性半干旱气候。大岔河为区内主要河流泾河的支流之一,最大平均流量 9.25 m^3/s。

大岔河隐伏岩溶含水层由奥陶系灰岩组成,埋藏于大岔河河谷,被厚 40～80 m 的第四系冲积物及第三系泥岩覆盖。含水层厚度 100～200 m。灰岩露头在两岸冲沟处零星出露。勘探结果表明,奥陶系灰岩岩溶发育,富水性较好,水质优良,单井涌水量大于 50 L/s,具有良好的开发利用前景。然而,本区隐伏岩溶含水层埋藏条件极为复杂[1],对资源评价及储量勘探工作带来相当大的困难。本文通过区内一个完整水文年,11 个大气降水氚值采样点的采样测试,提供了天然同位素技术在此方面所做的研究成果。取样点分布见图 1。

2　计算模型

2.1　物理模型

同位素研究结果表明,大岔河隐伏岩溶水为一相对独立的水文地质系统。不同类型的岩溶水均由

4　Yamazaki F, Shinozuke M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. J Engng Mech, 1988; 114(8): 1335～1354

5　姚磊华. 地下水水流模型的 Taylor 展开随机有限元法. 煤炭学报, 1996; (6): 566～570

6　姚磊华. 地下水运移随机数值模拟研究. 国家地震局地质研究所博士学位论文, 1995

7　周仰效. 国外地下水流及物质传输的模拟:现状与趋势. 北京:地震出版社, 1993: 200～209

(收稿日期 1997－01－06)

NEUMANN EXPANSIONS MONTE－CARLO STOCHASIC FINITE ELEMENT METHOD FOR GROUNDWATER MODELS

Yao Leihua (Xi′an Branch, CCRI)

Abstract　Neumann Expansions Monte-Carlo stochastic finite element method (NMCSFEM) for ground water models is discussed. The computing methods of the mean value, the variance and probability in some interval of water head at each node are given. Neumann expansions is introduced into the research field of groudwater to improve computational efficiency. When number of input stochastic variables is large, and the variances of input stochastic variables are big, NMCSFEM is best choice. The 2-D confined groundwater flow example (with an analytical solution) is used for stochastic numerical test.

Keywords　ground water; mathmatical models; Neumann expansions; Monte-Carlo method; finite element methods