在PC-1500计算机上实现地震信号频谱分析的FFT法

甘肃省煤田综合普查队　时作舟 靳聚盛

在地震工作中，频谱分析方法对试验、设计工作以及各种激发和接收因素的选择，有着重要的指导意义。但是，这种频谱分析工作通常是在野外获得大量资料后，到计算站集中进行处理的。它难以满足野外队对所获资料随时随地进行计算处理，以便灵活快速地指导野外工作的要求。本文通过对一个实际地震信号进行人工离散采样，编制BASIC语言计算程序，在PC-1500机上求出其振幅谱的数据和图形，并进行频谱分析。

一、傅里叶变换——DFT

周期函数$x(t)$的傅氏表达式如下：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

其中

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

它的指数形式为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega_0 t}d_\omega \quad (2)$$

其中 $$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-in\omega_0 t}dt \quad (3)$$

二、在微机PC—1500上实现DFT算法

(一)数学模型

用微机进行计算时，需将傅氏积分变成离散傅氏变换。由于我们所取的值是有限的，它们的表达式如下：

$$\begin{cases} X(m\Delta f)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n\Delta t)e^{-i2\pi m\Delta f n\Delta t} & (4)\\ x(n\Delta t)=\Delta f\sum_{m=0}^{N-1}X(m\Delta f)e^{i2\pi m\Delta f n\Delta t} & (5)\end{cases}$$

利用尤拉公式展开(4)得

$$X(m\Delta f)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n\Delta t)\cos 2\pi m\Delta f n\Delta t-$$
$$-i\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n\Delta t)\sin 2\pi m\Delta f n\Delta t \quad (6)$$

而实部 $$R_e=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n\Delta t)\cos 2\pi m\Delta f n\Delta t \quad (7)$$

虚部 $$I_m=-\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n\Delta t)\sin 2\pi m\Delta f n\Delta t \quad (8)$$

因此振幅谱 $$A(m\Delta f)=\sqrt{(R_e)^2+(I_m)^2} \quad (9)$$

以上各式中 $m=0,1,2,\cdots\cdots,N-1$。$n=0,1,2,\cdots N-1$。Δt为时间的采样间隔，按照采样定理$\Delta t\leq\frac{1}{2f_{max}}$($f_{max}$为地震信号的最大视频率)，$f_{max}$越高，$\Delta t$越小，通常选$\Delta t=1ms, 2ms, 4ms$。$N$为离散采样个数。$N\Delta t$为采样长度，$N\Delta t$大一些，可以使求得频谱值点加密，提高精度。但随着$N\Delta t$的增大，其频带宽度变窄，主频向高频方向偏移；若$N\Delta t$过大，会使时窗内包含多个波组，而不能具体了解各个波组的频率情况。然而$N\Delta t$也不能太小，否则因基频太大，反映的情况粗糙，以致引起分析的误

解。Δf 为基频，也是频率的采样间隔，

$$\Delta f=\frac{1}{N\Delta t}\ 。$$

对图1所示的地震信号进行离散采样，利用(6)～(9)编程序计算，以f为横坐标，$A(f)$为纵坐标就可绘出地震信号的频谱图。

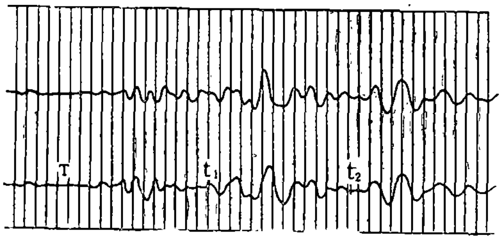

图1　地震信号波形T

(二)用BASIC语言编程序

流程如图2所示。

对图1中所示的T波形，从 t_1～t_2 每4 ms采一个样，共采32个离散值，输入微机按编制的程序执行，可绘出T波形的频谱（图3），计算的$A(\Delta f)$值如表1所示。

图3中的T为从程序开始执行到结束所用的时间。用DFT算法在微机PC-1500上计算需29分钟，为了提高运算速度，我们采用了快速傅里叶变换算法，该算法在32个采样点的情况下，可使运算速度提高近6倍。

三、快速傅里叶变换的算法(FFT-1)

(一)数学模型

重写式(4)得

$$X(m\Delta f)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x(n\Delta t)e^{-i2\pi m\Delta f n\Delta t}$$

其中　$n=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$；

$m=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$　　(10)

因$\Delta t=\dfrac{1}{N\cdot\Delta f}$，和号$\Sigma$前面的$\Delta t$，只影响$X(m\Delta f)$的大小，不影响它的特征，一般可省去。令 $W_N=e^{-\frac{i2\pi}{N}}$，$m=m\Delta f$，$n=n\Delta t$

化简(10)式得 $X(m)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{mn}$　　(11)

其中　$m=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$

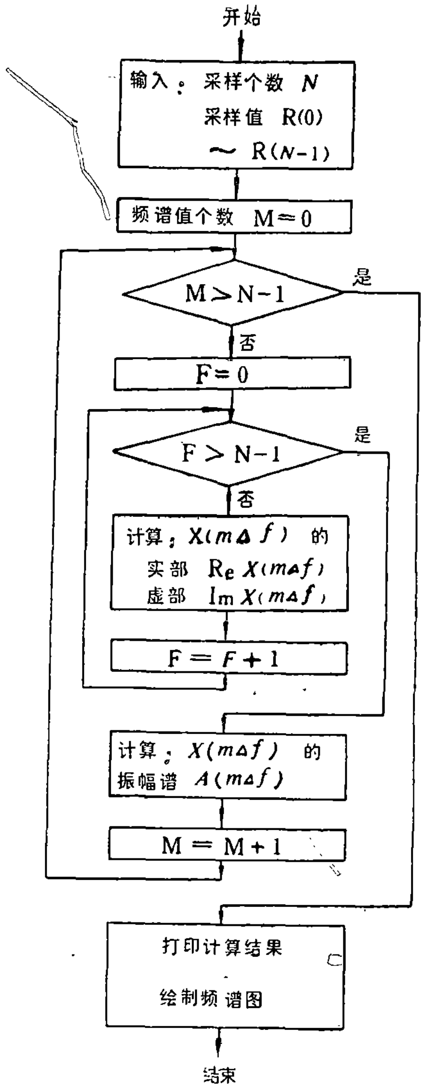

图2　DFT流程图

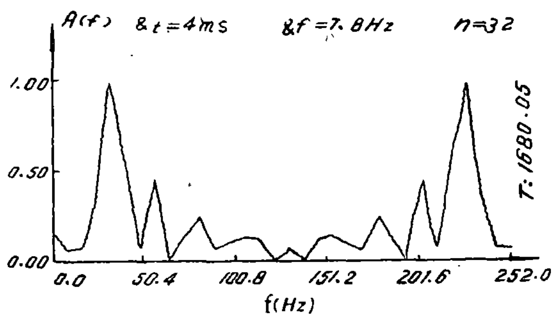

图3　频谱图

离散傅里叶变换数据　　表1

A(0)=	7.50000000
A(1)=	2.75174808
A(2)=	3.25684708
A(3)=	14.31461503
A(4)=	39.23184274
A(5)=	21.66482898
A(6)=	3.29788628
A(7)=	18.39488971
A(8)=	0.70000001
A(9)=	5.63476253
A(10)=	10.13542695
A(11)=	2.96472156
A(12)=	4.25705469
A(13)=	5.62860515
A(14)=	5.25261970
A(15)=	0.35248773
A(16)=	3.10000000
A(17)=	0.35248777
A(18)=	5.25261975
A(19)=	5.62860526
A(20)=	4.25705466
A(21)=	2.96427156
A(22)=	10.13542703
A(23)=	5.63476244
A(24)=	0.69999994
A(25)=	18.39488962
A(26)=	3.29788630
A(27)=	21.66482913
A(28)=	39.23184273
A(29)=	14.31461514
A(30)=	3.25684700
A(31)=	2.75174795

将上式分成两段计算得

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)\,W_N^{mn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{mn} \tag{12}$$

令　$l=n-N/2$，则$n=l+N/2$，那么

$$\text{当}\begin{cases} n=N/2\ \text{时}, & l=0; \\ n=N-1\ \text{时}, & l=N/2-1。\end{cases} \tag{13}$$

把(13)代入(12)式等号右边第二项得

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{mn}+$$
$$+\sum_{l=0}^{N/2-1}x\left(l+\frac{N}{2}\right)W_N^{m(l+N/2)} \tag{14}$$

将(14)式右端第二项中用 n 代替 l 便得

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{mn}+$$
$$+\sum_{n=0}^{N/2-1}x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{m(n+N/2)}$$
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+\right.$$
$$\left.+x\left(n+\frac{N}{2}\right)W_N^{m\cdot N/2}\right]W_N^{mn} \tag{15}$$

对(15)式按m的奇、偶序号化为两部分得

当$m=2l$ 时

$$\begin{cases} W^{m\cdot\frac{N}{2}}=e^{-\frac{i2\pi}{N}\cdot 2l\cdot\frac{N}{2}}=e^{-i2l\pi}=1 \\ W_N^{mn}=e^{-\frac{2\pi i}{N}\cdot 2l n}=e^{-\frac{2\pi i}{N/2}\cdot l n}=W_{N/2}^{ln} \end{cases}$$

当$m=2l+1$时

$$\begin{cases} W_N^{m\cdot\frac{N}{2}}=e^{-\frac{2\pi i}{N}\cdot\frac{N}{2}\cdot(2l+1)} \\ \qquad =e^{-i2l\pi}\cdot e^{-i\pi}=-1 \\ W_N^{mn}=e^{-\frac{2\pi i}{N}\cdot(2l+1)\cdot n}=W_{N/2}^{ln}\cdot W_N^{n} \end{cases}$$

则

$$X(m)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+\right. \\ \left.+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_{N/2}^{ln},\quad m=2l\text{时} \\ \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)-\right. \\ \left.-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^{n}\cdot W_{N/2}^{ln}, \\ m=2l+1\ \text{时} \end{cases} \tag{16}$$

上式即为快速傅里叶变换公式。

$$\begin{cases} X(2l)\longleftrightarrow x(n)+x(n+N/2)=A(n) \\ X(2l+1)\longleftrightarrow[x(n)- \\ -x(n+N/2)]W_N^{n}=A(N/2+n) \end{cases} \tag{17}$$

例1　若$N=2$，则当$n=0$时得

$$\begin{cases} A(0)=x(0)+x(1) & \Longrightarrow X(0) \\ A(1)=[x(0)-x(1)]W_2^0 & \Longrightarrow X(1) \end{cases}$$

例2　若$N=4$，则当$n=0$时

$$\begin{cases} A(0)=x(0)+x(2) \\ A(2)=[x(0)-x(2)]W_4^0 \end{cases}$$

$n=1$时

$$\begin{cases} A(1)=x(1)+x(3) \\ A(3)=[x(1)-x(3)]W_4^1 \end{cases}$$

再按$N=2$时方式计算得

$$\begin{cases} A'(0)=A(0)+A(1) & \Longrightarrow X(0) \\ A'(1)=[A(0)-A(1)]W_2^0 & \Longrightarrow X(2) \\ A'(2)=A(2)+A(3) & \Longrightarrow X(1) \\ A'(3)=[A(2)-A(3)]W_2^0 & \Longrightarrow X(3) \end{cases}$$

从以上两个简单的例子中，我们可以画出计算$X(m\Delta f)$的流程图(图4)。

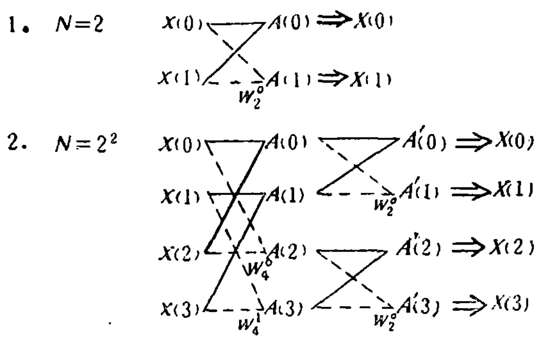

图4 计算$X(m\Delta f)$流程图

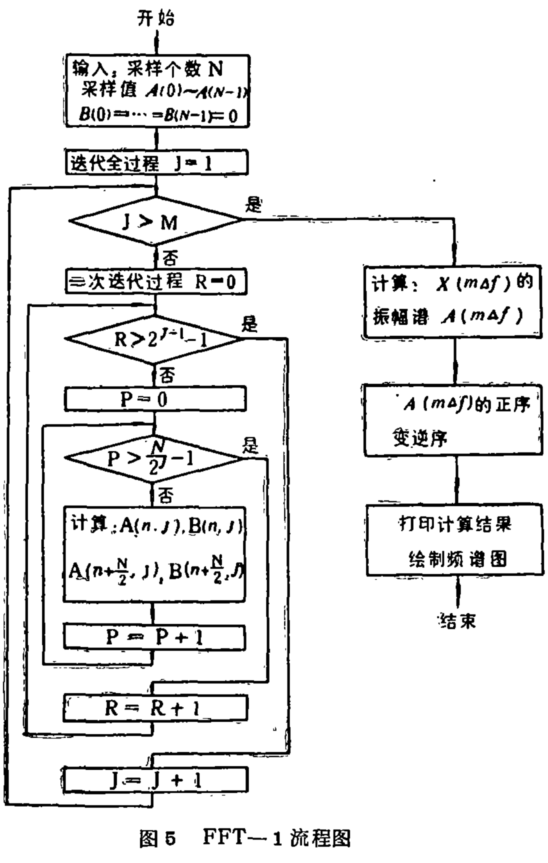

图5 FFT—1流程图

以上两例表明，采样个数必须是2^P(P为正整数)，要计算m个$X(m\Delta f)$的值，只需按公式(17)迭代P次，就可一次算出m个$X(m\Delta f)$的值。从例2发现，第P次迭代后的结果$X(m)$与原时间序列$x(n)$的顺序不同，分别是二进制数的正序排列和逆序排列。它们的转换关系是把$A'(m)$中m化成二进制数$J_{P-1}2^{P-1}+J_{P-2}2^{P-2}+\cdots+J_1 2+J_0 2^0$，然后把这个二进制数的权系数颠倒变为$J_{P-1}2^0+J_{P-2}2+\cdots+J_1 2^{P-2}+J_0 2^{P-1}$作为$X(m)$中的$m$。这就获得了所要求的每一个$X(m)$值。下面根据式(17)的例2流程编程序。

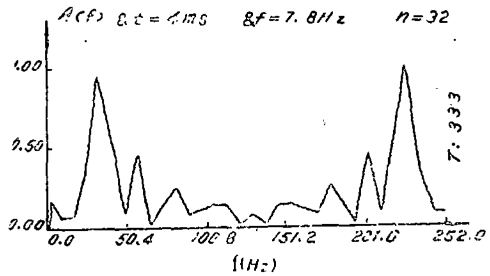

图6 频谱图

(二)用BASIC语言编FFT算法的程序

仍用图1所示的T波形，用FFT法求它的频谱图，其程序略。流程如图5所示，频谱如图6所示，计算的$A(\Delta f)$值如表2所示。

四、实序列的FFT算法(FFT-2)

(一)算法的导出

在以上FFT的计算中，是假定$x(n)$为复序列$\{x(n)\}$来编程序的。实际上地震信号的每一个采样离散值都是实数。因此，应把复序列的虚部处理成零，引进零参量参加运算。这样，机器在运算时间、储存单元上将造成浪费。为解决这一问题，就得把所有采样值按奇偶顺序重排，人为地构成一个复序列。用FFT计算出偶序列$x(2l)$的频谱

快速傅里叶变换数据　表2

A1(0)=	7.5000000
A1(1)=	2.7517480
A1(2)=	3.2568469
A1(3)=	14.3146150
A1(4)=	39.2318427
A1(5)=	21.6648289
A1(6)=	3.2978862
A1(7)=	18.3948896
A1(8)=	0.7000000
A1(9)=	5.6347625
A1(10)=	10.1354269
A1(11)=	2.9642715
A1(12)=	4.2570546
A1(13)=	5.6286052
A1(14)=	5.2526197
A1(15)=	0.3524877
A1(16)=	3.1000000
A1(17)=	0.3524877
A1(18)=	5.2526197
A1(19)=	5.6286052
A1(20)=	4.2570546
A1(21)=	2.9642715
A1(22)=	10.1355269
A1(23)=	5.6347625
A1(24)=	0.7000000
A1(25)=	18.3948896
A1(26)=	3.2978862
A1(27)=	21.6648289
A1(28)=	39.2318427
A1(29)=	14.3146150
A1(30)=	3.2568469
A1(31)=	2.7517480

$X'_1(m)$，奇序列$x(2l+1)$的频谱$X'_2(m)$，最后导出$X(m)$。下面叙述该法的全部过程：

假设有$N=2^P$个离散值的一个实序列$\{x(n)\}$，按序号的奇偶将它们分为$N/2$个点的两个子序列$\{x(2l)\}$、$\{x(2l+1)\}$。$x_1(l)=x(2l)$，$x_2(l)=x(2l+1)$，其中$l=0,1,2\cdots,N/2-1$，P为正整数。

利用$x_1(l)$和$x_2(l)$构成一个复序列：

$$x(l)=x_1(l)+ix_2(l)$$

$$l=0,1,2,\cdots,N/2-1 \tag{18}$$

利用(三)中FFT算法计算出$x(l)$的复序列谱$X'(m)$，根据上式得

$$X'(m)=X'_1(m)+iX'_2(m)$$

$$m=0,1,2,\cdots,N/2-1 \tag{19}$$

将上式中m用$N/2-m$代替，则得

$$X'(N/2-m)=X'_1(N/2-m)+ +iX'_2(N/2-m) \tag{20}$$

将上式两端取共轭得

$$\overline{X}'(N/2-m)=\overline{X}_1(N/2-m)- -i\overline{X}_2(N/2-m) \tag{21}$$

根据DFT的共轭性质，对于实序列$x_1(l)$与$x_2(l)$有：

$$\begin{cases}\overline{X}'_1(N/2-m)=X'_1(m)\\ \overline{X}'_2(N/2-m)=X'_2(m)\end{cases}$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N/2-1 \tag{22}$$

于是由式(21)得：

$$\overline{X}'(N/2-m)=X'_1(m)-iX'_2(m)$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N/2-1 \tag{23}$$

联立(19)、(23)得

$$\begin{cases}X'_1(m)=\frac{1}{2}[X'(m)+\overline{X}'(N/2-m)]\\ X'_2(m)=\dfrac{1}{2i}[X'(m)-X'(N/2-m)]\end{cases}$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N/2-1 \tag{24}$$

已知 $$\begin{cases}X'_1(m_1)=\sum_{l=0}^{N/2-1}x_1(l)W_1^{lm}\\ X'_2(m_2)=\sum_{l=0}^{N/2-1}x_2(l)W_1^{lm}\end{cases}$$

其中 $W_1=e^{-\frac{2\pi i}{N/2}}$

则 $$\begin{aligned}X(m)&=\sum_{l=0}^{N-1}x(l)W^{lm}\\ &=\sum_{l=0}^{N/2-1}x(2l)W_1^{2lm}+\\ &+\sum_{l=0}^{N/2-1}x(2l+1)W_1^{(2l+1)m}\\ &=\sum_{l=0}^{N/2-1}x_1(l)W_1^{lm}+\\ &+\sum_{l=0}^{N/2-1}x_2(l)W_1^{lm}W^m\\ &=X'_1(m_1)+X'_2(m_2)W^m\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $W=e^{-\frac{2\pi i}{N}}$

(二)程序编制

根据上面的数学模型编制程序，流程如图 7 所示，其计算的$A(\Delta f)$如表 3 所示，频谱如图 8 所示。

实序列快速傅里叶变换数据　表3

A2(0)=	7.5000000
A2(1)=	2.7517480
A2(2)=	3.2568469
A2(3)=	14.3146150
A2(4)=	39.2318427
A2(5)=	21.6648289
A2(6)=	3.2978862
A2(7)=	18.3948896
A2(8)=	0.7000000
A2(9)=	5.6347625
A2(10)=	10.1354269
A2(11)=	2.9642715
A2(12)=	4.2570546
A2(13)=	5.6286052
A2(14)=	5.2526197
A2(15)=	0.3524877
A2(16)=	3.1000000
A2(17)=	0.3524877
A2(18)=	5.2526197
A2(19)=	5.6286052
A2(20)=	4.2570546
A2(21)=	2.9642715
A2(22)=	10.1354269
A2(23)=	5.6347625
A2(24)=	0.7000000
A2(25)=	18.3948896
A2(26)=	3.2978862
A2(27)=	21.6648289
A2(28)=	39.2318427
A2(29)=	14.3146150
A2(30)=	3.2568469
A2(31)=	2.7517480

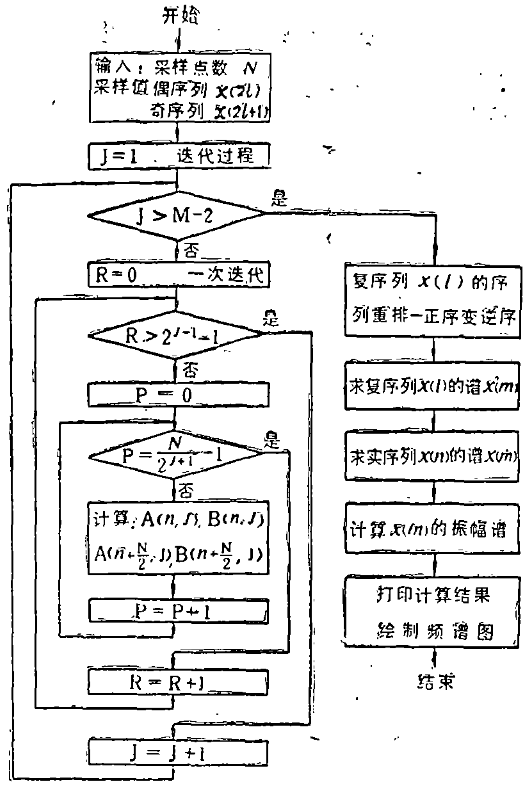

图7　流程图

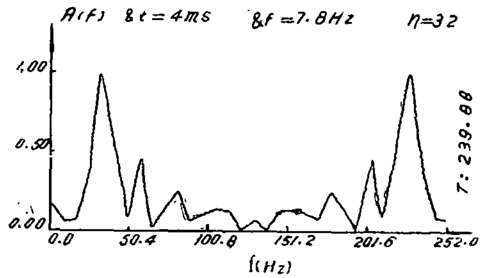

图8　频谱图

全国煤田地质勘探科学技术大会　于1985年9月7日至13日在河北涿县召开。这是全国煤田地质系统有史以来的第一次科学技术盛会。煤炭部副部长陈钝、副总工程师郝凤印、陈炳强参加了会议。梁纪刚副局长致开幕词，刘崇礼局长做了题为《增强依靠科学技术进步的紧迫感，下决心改变煤田地质勘探面貌》的报告。报告强调，在当前世界上正在崛起的新的技术革命的挑战下，煤田地质科技工作必须注重成果，讲求经济效益，狠抓科技成果转化为生产力，建立科技体系，改革科技管理办法，强化勘探队和专业队的技术吸收能力，重视煤田地质部门科技人才的培养和智力开发，进一步做好设备技术引进工作，积极推进管理工作现代化。

王琮总工程师宣读了《1986—2000年煤田地质勘探科学技术发展规划》，提出煤田地质工作今后15年的总的奋斗目标、发展方向和主要任务：经过15年的努力，主要技术装备全部更新换代，队伍技术素质全面提高，达到质量高、速度快、效益好，彻底改变煤田地质勘探面貌，达到世界先进国家80年代水平。并提出了为实现上述目标的具体措施和办法。

大会表彰了煤田地质系统46名优秀科技干部和劳动模范，奖励了36个科技项目。会议还讨论制定了《科研和技术工作管理办法》、《煤田地质勘探公司(局)、队总工程师责任制》，举办了科技成果展览会，开展了小型科技成果交易会。

(蒋士钧)