

文章编号: 1001-1986(2017)02-0147-05

基于 GA-BP 神经网络算法的高密度电法非线性反演

赵 涛, 于师建

(山东科技大学矿业与安全工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 高密度电法技术在煤矿地质灾害勘探中发挥着重要的作用。近年来, 以 BP(Backpropagation)神经网络为代表的一类非线性反演方法被广泛运用到高密度电法的反演中。针对 BP 神经网络方法在高密度电法反演中存在的易陷入局部极小、收敛缓慢、反演精度差等问题, 将 BP 神经网络算法与遗传算法(Genetic Algorithm, 简称 GA 算法)联合演算, 实现高密度电法的二维非线性反演。通过典型地电模型对该方法进行验证, 结果表明遗传算法能有效优化 BP 神经网络的权值和阈值, 提高了算法的全局寻优性。

关键词: 高密度电法; 非线性反演; 遗传算法; BP 神经网络

中图分类号: P631 文献标识码: A DOI: 10.3969/j.issn.1001-1986.2017.02.026

GA-BP neural network algorithm-based nonlinear inversion for high density resistivity method

ZHAO Tao, YU Shijian

(College of Mining and Safety Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: High density resistivity method has played an important role in geological disaster exploration in mining industry. In recent years some non-linear inversion methods represented by BP neural network have been widely used in the two-dimensional inversion of high density resistivity method. Aiming at the shortcomings of BP neural network such as being easy to fall into local minimum, slow convergency and poor inversion accuracy, the proposed method tried to combine the genetic algorithm and BP neural network method to achieve the two-dimensional inversion of high density resistivity method. The results of the classical electric model indicated that the genetic algorithm method can optimize the weights and bias of the BP neural network effectively and improve the performance of global optimization.

Keywords: high density resistivity method; non-linear inversion; genetic algorithm; BP neural network

高密度电法是基于常规电阻率法发展来的一种高效、快速的勘探方法。在国内外煤矿采空区勘探、矿井水害预测、灌浆质量检测等工程地质领域应用非常广泛。目前, 高密度电法的资料解释多以线性反演为主, 而线性反演是将非线性问题在初始模型附近进行线性化, 这就使得线性反演方法存在一定的局限性^[1]。神经网络以其独特的学习记忆能力和较强非线性逼近能力在高密度电法的反演中逐渐得到了广泛应用。但由于 BP(Backpropagation)神经网络的初始权值、阈值随机产生, 使得网络容易陷入局部极小, 反演精度低^[2]。为了解决 BP 神经网络在

高密度电法反演中存在的不足, 笔者将遗传算法与 BP 神经网络联合演算, 使用遗传算法优化 BP 神经网络的初始权值和阈值, 提高网络的性能, 并对高密度电法进行反演。通过对典型地电模型进行验证, 以说明 GA-BP 算法用于高密度电法二维非线性反演的优越性和可行性。

1 BP 神经网络及 GA 算法简介

BP 神经网络是按照误差逆向传播算法(简称 BP 算法)训练的一种多层前馈型神经网络, 同时 BP 算法也是目前神经网络领域中普遍使用的算法。典型的 BP

收稿日期: 2016-04-15

基金项目: 山东省自然科学基金项目(ZR2011DM014); 国家自然科学基金项目(51274135)

Foundation item: Natural Science Foundation of Shandong Province, China(ZR2011DM014); National Natural Science Foundation of China(51274135)

第一作者简介: 赵涛(1991—), 男, 山东枣庄人, 硕士研究生, 从事电磁法非线性反演研究。E-mail: 120298482@qq.com

通讯作者: 于师建(1962—), 男, 山东济南人, 博士, 教授, 从事地球物理正反演方法的研究。E-mail: ysj7179@163.com

引用格式: 赵涛, 于师建. 基于 GA-BP 神经网络算法的高密度电法非线性反演[J]. 煤田地质与勘探, 2017, 45(2): 147-151.

ZHAO Tao, YU Shijian. GA-BP neural network algorithm-based nonlinear inversion for high density resistivity method[J]. Coal Geology & Exploration, 2017, 45(2): 147-151.

神经网络是由输入层、输出层和一个(或多个)隐含层组成的多层神经网络。BP 算法是一种简单的梯度下降法,通过计算目标函数对网络参数的梯度对权值 $W(n)$ 和阈值 $b(n)$ 进行修正,属于有监督学习的范畴。BP 算法进行反向传导时,没有考虑先前积累的信息,只是按 n 时刻的负梯度对参数进行修正,从而经常使学习过程面临陷入局部极小值^[3]、发生振荡^[4]或收敛缓慢等问题^[5-6]。在神经网络的训练过程中,通常采用附加动量法,在每一个待调节参数的变化上加入一项正比于前次参数变化的值,以避免网络的学习发生振荡。带有附加动量项的权值和阈值调节公式为

$$\Delta\omega_{ij}(t+1) = (1-m)\eta\delta_i p_i + m\Delta\omega_{ij}(t) \quad (1)$$

$$\Delta b_i(t+1) = (1-m)\eta\delta_i p_i + m\Delta b_i(t) \quad (2)$$

式中 η 为网络学习率, $0 < \eta < 1$; t 为迭代次数; m 为附加动量项, $0 \leq m < 1$ 。

遗传算法(Genetic Algorithms, 简称 GA)是模拟生物遗传机制和自然选择过程形成的一种并行性随机搜索最优化算法^[7-10]。将生物进化论中“优胜劣汰”的思想引入对待优化参数编码组成的群体中。通过定义好的适应度函数衡量每个编码个体的优劣程度,淘汰适应度差的个体,同时选取优秀的个体进行选择、交叉和突变等操作生成下一代种群,重复此过程,直到种群中的个体逐渐接近最优解^[11]。

2 GA-BP 神经网络算法原理

2.1 基本思想

GA-BP 神经网络算法的总体思路可分为 3 个部分:确定网络拓扑结构、遗传算法优化以及 BP 神经网络预测。首先根据实际问题设计网络各层节点数和隐含层数确定网络拓扑结构,进而对遗传算法个体进行编码。在遗传算法优化部分中,通过选择、交叉和变异等遗传操作,对 BP 神经网络权值和阈值进行寻优。最后,使用遗传算法优化后的参数对 BP 神经网络初始化,通过 BP 算法进一步寻优,在较小的解空间中对网络参数进行修正,最终得到最优解。

2.2 GA 算法的实现

a. 种群初始化

采用实数编码的方式对个体进行编码,初始个体随机生成,每个个体均为一整串实数。BP 神经网络的待优化参数包含输入层与隐含层之间、隐含层与输出层之间以及隐含层与隐含层之间所有节点的权值和阈值。当神经网络拓扑结构确定之后,遗传算法个体长度也随之确定。编码后的每一个个体包含 BP 神经网络的全部待优化参数。例如,输入节点数为 i , 隐含层节点数为 j , 输出节点数为 k 的单

隐含层 BP 神经网络,其个体需要编码的参数包括输入层与隐含层 $j \times i$ 个权值,隐含层 j 个阈值,隐含层与输出层 $k \times j$ 个权值,输出层 k 个阈值,个体编码长度为以上参数个数之和。

b. 适应度函数

定义适应度函数衡量个体的优劣程度。使用个体参数对 BP 神经网络的权值和阈值赋值,对训练样本进行训练。计算网络期望输出与实际输出之间的绝对误差 F 作为遗传算法的适应度函数,其适应度值越小代表网络预测结果越好,适应度函数的计算公式为

$$F = u \left(\sum_{i=1}^n \text{abs}(y_i - o_i) \right) \quad (3)$$

式中 y_i 、 o_i 分别为第 i 个网络输出节点的期望输出和实际输出; n 为网络输出结点个数; u 为系数。

c. 选择操作

遗传算法的选择策略有锦标赛法、轮盘赌法等多种策略,笔者采用的轮盘赌法,其基本思想为个体适应度值的大小与其被选中的几率成正比。个体 i 被选中的概率 P_i 为

$$f_i = c / F_i \quad (4)$$

$$P_i = f_i / \sum_{j=1}^N f_j \quad (5)$$

式中 N 为种群规模; F_i 为个体 i 的适应度值; c 为系数。

d. 交叉操作

每个个体为一实数串,将两个个体在某一相同位置截断,被截断的实数串交叉组合后形成两个新的个体。例如,第 k 个个体 a_k 和第 l 个个体 a_l 在 j 位的交叉操作方法如下:

$$a_{kj} = a_{kj}(1-b) + a_{lj}b \quad (6)$$

$$a_{lj} = a_{lj}(1-b) + a_{kj}b \quad (7)$$

式中 b 在区间 $[0,1]$ 内随机取值。

e. 变异操作

选取第 i 个个体在第 j 个基因处 a_{ij} 进行变异,其实现方法如下

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + (a_{ij} - a_{\max})f(g) & r > 0.5 \\ a_{ij} + (a_{\min} - a_{ij})f(g) & r \leq 0.5 \end{cases} \quad (8)$$

式中 a_{\max} 、 a_{\min} 分别为个体基因 a_{ij} 的上下两个边界; r 为 $[0,1]$ 的随机数; 其中 $f(g) = r_2(1-g/G_{\max})^2$; r_2 为随机数; G_{\max} 、 g 分别为种群最大进化代数和当前进化代数。

2.3 GA-BP 算法步骤与流程

遗传算法优化的 BP 神经网络学习算法实现步骤与流程如下:

步骤 1 确定 BP 神经网络拓扑结构,根据网络权值和阈值个数设计染色体长度。

步骤 2 随机产生初始种群。种群为一组实数串, 每个实数串包含了神经网络全部权值和阈值的集合。

步骤 3 正向运行网络, 根据式(3)计算每个个体的适应度值, 衡量个体的优劣程度。

步骤 4 根据优劣度对种群个体进行排序, 保留最优秀的前 10% 的个体, 不进行遗传操作, 直接进入下一代群体。对剩余 90% 的个体进行选择、交叉、变异操作, 产生下一代另外 90% 的群体。形成新的 BP 网络连接权值和阈值。

步骤 5 重复步骤 2—步骤 4, 直到 $R \leq R_{\max}$ (遗传算法设定的性能指标) 或达到最大进化代数, 从未代种群中选取最优个体。其中

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - o_i)^2 \quad (9)$$

步骤 6 从最优个体中获得遗传算法优化后的权值和阈值, 并对 BP 神经网络初始化。

步骤 7 双向运行网络 根据 BP 算法按照式(1)、式(2)调整神经网络的权值和阈值, 进一步优化网络。

步骤 8 重复步骤 7, 直到 $(y_i - o_i) \leq d_{\max}$ (单个样本的最大误差) 或 $R \leq R_{\max}$ (BP 算法设定的网络性能指标, 即最终要求的性能指标)。保存网络权值和阈值, 网络训练结束。

3 基于 BP 神经网络的二维反演

3.1 BP 神经网络结构的设计

BP 神经网络的反演首先需要样本对其进行训练, 其样本的正演模型参数设置如下: 采用温纳装置, 测量电极为 37 个 (一般测量中电极个数为 32 或 64, 为获取足够的测点个数, 又不大幅增加计算量, 正演电极个数设置为 37), 极距为 1 m, 一条测线上共有 10 层 205 个数据点, 正演采用有限差分法。样本模型由背景均匀介质和异常体组成, 通过改变异常体的位置、形状、电阻率大小来获取不同的样本模型。共设计用于训练的不同样本 60 个, 其中 50 个样本数据用来训练网络, 10 个样本数据用于测试。

神经网络的反演方法与一般常规反演方法的思路有较大的不同, 它不需要反复正演迭代以求得拟合观测数据的反演模型, 而是通过样本学习来建立反演模型与观测数据之间的非线性关系, 这一过程称为神经网络建模^[12]。在二维、三维高密度电法反演中, 由于地电模型的结构复杂, 神经网络往往采用双隐层或三隐层结构, 而神经网络的样本划分则需要考虑异常体的位置和形态等因素。因此, 笔者使用双隐层 BP 神经网络, 以正演的视电阻率水平位置、垂直位置和视电阻率值为输入结点, 对应的真电阻率值为输出结点, 将每次测量的所有数据

点作为一个数据集进行训练。隐含层神经元的数目按经验确定为, 第 1 层 30 个, 第 2 层 10 个, 最后形成 BP 神经网络从输入到输出的映射关系。

综上所述, 建立高密度电法二维反演的 BP 神经网络模型拓扑结构为 3-30-10-1。其中, 输入结点为 3 个, 隐含层第 1 层节点为 30 个, 隐含层第 2 层节点为 10 个, 输出结点为 1 个。在 MATLAB R2014b 软件中使用神经网络工具箱调用 feedforwardnet 函数, 其传输函数为“tansig”, 学习函数为“lmgdm”, 训练函数为“trainlm”。其他参数的设置参照参考文献[13]。

3.2 BP 神经网络算法反演算例

模型为 1 个低阻体模型, 模型尺寸为 40 m×12 m, 背景均匀介质电阻率为 100 $\Omega \cdot m$; 在模型中心, 深度 1 m 处存在 1 个大小为 4 m×1 m 的矩形高阻异常体, 电阻率为 500 $\Omega \cdot m$; 在深度为 2 m 处存在 1 个大小为 2 m×2 m 的矩形低阻异常体, 电阻率为 10 $\Omega \cdot m$, 模型及其 BP 神经网络反演结果如图 1 所示。

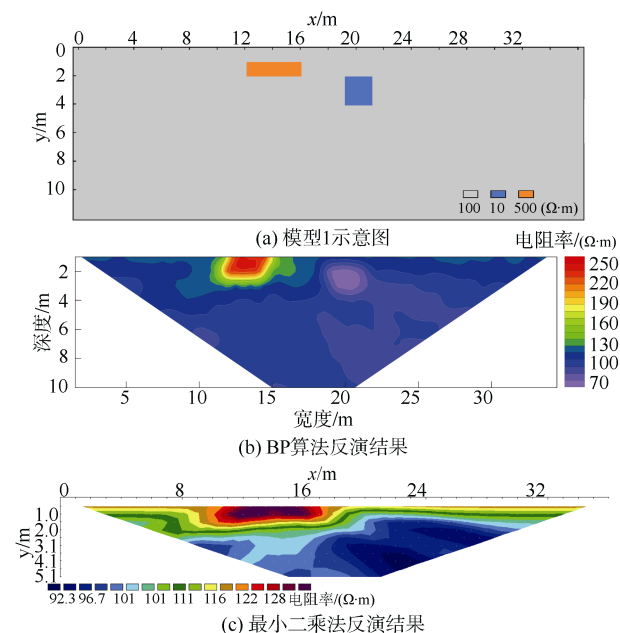


图 1 模型 1 示意图及 2 种方法反演结果

Fig.1 Inversion results of two methods in model 1

从图 1 的反演结果可以看出, 最小二乘法和 BP 神经网络算法都能基本上反映出模型中异常体的位置和电阻值, 但 BP 神经网络算法的结果更加精确, 细节方面也更清晰, 其反演结果优于最小二乘法的反演结果。

4 GA-BP 神经网络的二维反演

4.1 GA 算法对 BP 神经网络的优化

根据 BP 神经网络 3-30-10-1 的拓扑结构, 确定输入层到第 1 层隐含层的权值个数为 30×3, 第 1 层隐含层的阈值个数为 30, 第 1 层隐含层到第 2 层

隐含层的权值个数为 10×30 , 输出层的阈值个数为 10, 第 2 层隐含层到输出层的权值个数为 1×10 , 输出层的阈值个数为 1。上述参数个数共计 441 个。

选取种群大小为 30, 交叉概率为 0.8, 变异概率为 0.08, 遗传代数为 100。使用 GA 算法对挑选的 10 个样本的 2 050 组训练数组进行 441 个权值初始权值和阈值的最优寻找, 并与 GA 算法作对比。种群最优个体适应度值随遗传代数的变化如图 2 所示。

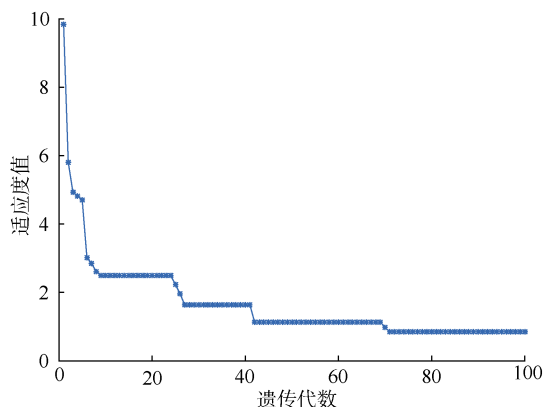


图 2 最优个体适应度值

Fig.2 Fitness value of the best individual

4.2 GA-BP 神经网络算法反演算例

以图 1a 模型为例, 使用 GA-BP 神经网络算法进行反演, BP 算法作对比。首先分别将 4.1 节中使用 GA 算法得到的最优初始权值和阈值, 对 BP 神经网络的 441 个权值和阈值进行赋值, 然后再使用样本对 BP 神经网络进行训练, 在 BP 神经网络中进一步对网络权值和阈值迭代寻优。最后, 用优化训练的神经网络对模型进行反演, 将反演结果用 surfer 软件成图。图 3 为 GA-BP 神经网络算法的反演结果。

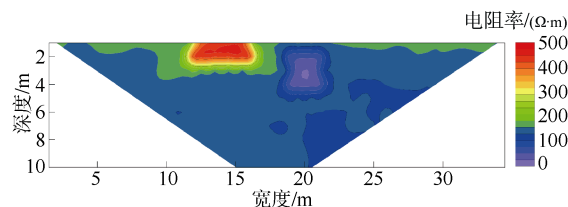


图 3 GA-BP 算法反演结果

Fig.3 Inversion results of GA-BP algorithms

为了更清楚的对比两种算法, 评价自变量与建立的模型之间关系是否合适。根据文献[14]提供的方法引入均方误差 R_{MSE} 和优劣判断系数 R^2 , 对算法性能做出评价。

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^q (y_k - \bar{c}_k)^2}{\sum_{k=1}^q (y_k - \bar{y}_k)^2} \quad (10)$$

式中 \bar{y}_k 是期望输出的平均值, \bar{c}_k 是实际输出平均值。判断系数 R^2 通常用介于 0~1, 其值越大代表自变量和因变量之间的符合性越好。 R_{MSE} 值越小越好。因此 R^2 越大, R_{MSE} 越小则代表算法性能更好。表 1 所列 GA-BP 算法和 BP 算法的性能对比。

表 1 2 种反演算法性能比较

Table 1 Comparison of results from two inversion methods

反演方法	训练资料数据		预测反演数据	
	R^2	R_{MSE}	R^2	R_{MSE}
GA-BP 方法	0.996 4	0.257 7	0.925 7	3.180 7
BP 方法	0.922 4	14.646 1	0.827 3	32.172 4

根据图 3 可以看出, GA-BP 算法的反演结果与模型原始值拟合度更高, 说明 GA-BP 算法的反演结果更接近模型。从表 1 可以看出 GA-BP 算法的均方误差 R_{MSE} 较小, 优劣判断系数 R^2 较大, 说明了 GA-BP 算法相比 BP 算法性能更好。这是由于 GA 算法有效的优化了 BP 神经网络的权值和阈值, 提高了算法的全局寻优性。

5 结 语

将 GA 算法与 BP 神经网络相结合对高密度电法进行非线性反演。该算法首先确定神经网络的结构, 随机产生神经网络的初始权值和阈值生成染色体种群, 然后进行染色体的复制、交叉、变异。通过遗传算法产生的最优值作为 BP 神经网络的初值权值和阈值, 用此来提高 BP 神经网络的性能, 并对高密度电法资料进行反演。通过对两组模型的反演计算, 清楚地反映出 GA-BP 算法用于高密度电法二维非线性反演的优越性和可行性。

参考文献

- [1] 戴前伟, 江沸波. 基于混沌振荡 PSO-BP 算法的电阻率层析成像非线性反演[J]. 中国有色金属学报, 2013, 23(10): 2897-2904.
DAI Qianwei, JIANG Feibo. Nonlinear inversion for electrical resistivity tomography based on chaotic oscillation PSO-BP algorithm[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals, 2013, 23(10): 2897-2904.
- [2] 穆阿华, 周绍磊, 刘青志, 等. 利用遗传算法改进 BP 学习算法[J]. 计算机仿真, 2005, 22(2): 150-151.
MU Ahua, ZHOU Shaolei, LIU Qingzhi, et al. Using genetic algorithm to improve BP training algorithm[J]. Computer Simulation, 2005, 22(2): 150-151.
- [3] 刘春艳, 凌建春, 寇林元, 等. GA-BP 神经网络与 BP 神经网络性能比较[J]. 中国卫生统计, 2013(2): 173-176.

- LIU Chunyan, LING Jianchun, KOU Linyuan, et al. Performance comparison between GA-BP neural network and BP neural network[J]. Chinese Journal of Health Statistics, 2013(2): 173-176.
- [4] 温长吉, 王生生, 于合龙, 等. 基于改进蜂群算法优化神经网络的玉米病害图像分割[J]. 农业工程学报, 2013, 29(13): 142-149.
- WEN Changji, WANG Shengsheng, YU Helong, et al. Image segmentation method for maize diseases based on pulse coupled neural network with modified artificial bee algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2013, 29(13): 142-149.
- [5] 尹光志, 李铭辉, 李文璞, 等. 基于改进 BP 神经网络的煤体瓦斯渗透率预测模型[J]. 煤炭学报, 2013, 38(7): 1179-1184.
- YIN Guangzhi, LI Minghui, LI Wenpu, et al. Model of coal gas permeability prediction on improved BP neural network[J]. Journal of China Coal Society, 2013, 38(7): 1179-1184.
- [6] 潘国荣, 谷川. BP 算法改进及其在变形数据处理中的应用[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2008, 36(1): 118-121.
- PAN Guorong, GU Chuan. Back Propagation algorithm improvement and its application to deformation monitoring data processing[J]. Journal of Tongji University(Natural Science), 2008, 36(1): 118-121.
- [7] 马永杰, 云文霞. 遗传算法研究进展[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(4): 1201-1206.
- MA Yongjie, YUN Wenxia. Research progress of genetic algorithms[J]. Application Research of Computers, 2012, 29(4): 1201-1206.
- [8] 边霞, 米良. 遗传算法理论及其应用研究进展[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(7): 2425-2429.
- BIAN Xia, MI Liang. Development on genetic algorithm theory and its applications[J]. Application Research of Computers, 2010, 27(7): 2425-2429.
- [9] 王小平, 曹立明. 遗传算法—理论、应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002: 1-5.
- [10] 李敏强. 遗传算法的基本理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 1-3.
- [11] 师学明, 王家映. 地球物理资料非线性反演方法讲座(四)—遗传算法[J]. 工程地球物理学报, 2008, 5(2): 129-140.
- SHI Xueming, WANG Jiaying. Lecture on non-linear inverse methods in geophysics(4)—Genetic algorithm method[J]. Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2008, 5(2): 129-140.
- [12] 江沸波. 基于神经网络的混合非线性电阻率反演成像[D]. 长沙: 中南大学, 2014.
- [13] NEYAMADPOUR A, TAIB S, ABDULLAH Wan W A T. Using artificial neural networks to invert 2D DC resistivity imaging data for high resistivity contrast regions: A MATLAB application[J]. Computers & Geosciences, 2009, 35(11): 2268-2274.
- [14] 张凌云, 刘鸿福. ABP 法在高密度电阻率法反演中的应用[J]. 地球物理学报, 2011, 54(1): 227-233.
- ZHANG Lingyun, LIU Hongfu. The application of ABP method in high density resistivity method inversion[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2011, 54(1): 227-233.

(责任编辑 聂爱兰)

(上接第 146 页)

- [3] 屈召贵, 刘强. 基于北斗卫星的航行数据导航方法研究[J]. 舰船科学技术, 2016, 38(4): 145-147.
- QU Zhaogui, LIU Qiang. Research on voyage data navigation method based on the Beidou satellites[J]. Journal of Ship Science and Technology, 2016, 38(4): 145-147.
- [4] 武俊兵. 基于 MEMS 陀螺仪的寻北定向关键技术研究及其系统实现[D]. 西安: 电子科技大学, 2015.
- [5] 周策, 王瑜, 刘一民, 等. 地质超深钻孔自寻北陀螺测斜仪研制[J]. 探矿工程(岩土钻掘工程), 2014, 41(3): 36-40.
- ZHOU Ce, WANG Yu, LIU Yimin, et al. Geological ultra-deep drilling trouble developed north gyroscopic inclinometer[J]. Exploration Engineering(Rock & Soil Drilling Engineering), 2014, 41(3): 36-40.
- [6] 詹世玉. 随钻测量系统设计[J]. 自动化与仪器仪表, 2011(2): 134-135.
- ZHAN Shiyu. MWD system design[J]. Automation and Instrumentation, 2011(2): 134-135.
- [7] 雷晓荣. 回转钻进随钻测斜仪的研制及应用[J]. 煤田地质与勘探, 2015, 43(3): 118-121.
- LEI Xiaorong. Rotary drilling drilling of development and utilization of inclinometer[J]. Coal Geology & Exploration, 2015, 43(3): 118-121.
- [8] 龙达峰, 苏文. 基于 MEMS 陀螺的随钻测斜仪系统设计[J]. 机械工程与自动化, 2015(1): 126-128.
- LONG Dafeng, SU Wen. MWD inclinometer system design based on MEMS gyroscope[J]. Mechanical Engineering & Automation, 2015(1): 126-128.
- [9] 于小波, 杨超. 随钻井斜监测预警系统研究[J]. 石油机械, 2011, 39(3): 47-49.
- YU Xiaobo, YANG Chao. Along with the drilling inclined monitoring and early warning system research[J]. Journal of Petroleum Machinery, 2011, 39(3): 47-49.
- [10] 卜继军, 魏贵玲, 李勇建, 等. 陀螺寻北仪二位置寻北方案[J]. 中国惯性技术学报, 2002, 10(3): 46-49.
- BU Jijun, WEI Guiling, LI Yongjian, et al. Two-position detecting scheme for gyro-based north seeker[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2002, 10(3): 46-49.
- [11] 翁海途, 任春华, 张敬栋, 等. 基于最小分辨率的 MEMS 陀螺漂移抑制方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(10): 2371-2372.
- WENG Haiquan, REN Chunhua, ZHANG Jingdong, et al. Study on a method of decreasing the drift of MEMS gyroscope based on minimum resolution[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2011, 32(10): 2371-2372.

(责任编辑 聂爱兰)